UMinho|2013

Jorge Henrique Magalhães Teixeira **A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma do 11.º de MACS**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Jorge Henrique Magalhães Teixeira

A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma do 11.º de MACS

Janeiro de 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Jorge Henrique Magalhães Teixeira

A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma do 11.º de MACS

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo
do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

Janeiro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome: Jorge Henrique Magalhães Teixeira

Endereço eletrónico: jhmt1@hotmail.com

Telefone: 919827756

Número do Bilhete de Identidade: 12041472

Título do Relatório: A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma do 11.º ano de MACS.

Supervisora: Doutora Maria Helena Martinho

Ano de conclusão: 2013

Designação do Mestrado: Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA RELATÓRIO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, ____/____/_______

Assinatura:____

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível com o apoio de diferentes pessoas que contribuíram de forma significativa para a sua concretização. Neste sentido não poderia deixar de agradecer:

À minha supervisora, Professora Doutora Maria Helena Martinho, pelo estímulo que me proporcionou, pela sua disponibilidade e ajuda sempre presente e pela mensagem muito positiva que me deixou acerca do ensino da Matemática.

Ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Bentes Paulo, que sempre me motivou, pelos seus conselhos, compreensão e apoio prestado.

Aos alunos da turma em estudo, por todo o empenho e colaboração que demonstraram ao longo da implementação do projeto.

Aos meus colegas de mestrado com quem partilhei experiências e momentos de trabalho.

À minha família pelo seu amor, encorajamento e apoio incondicional. Em partícular à Bruna, pelo carinho, apoio, paciência, compreensão e por ter abdicado tantas vezes da minha presença.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE UMA TURMA DO 11.º ANO DE MACS

Jorge Henrique Magalhães Teixeira
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2013

RESUMO

O presente estudo centra-se na resolução de problemas matemáticos e resulta de uma intervenção de ensino numa turma do 11.º ano, na disciplina de MACS, durante a lecionação dos Modelos Populacionais. A investigação desenvolveu-se em torno de três objetivos: Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam quando resolvem problemas matemáticos; Reconhecer os aspetos fortes e os aspetos frágeis das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos; Listar e analisar as dificuldades que os alunos revelam durante a resolução de problemas matemáticos.

Para atingir os objetivos de investigação procedeu-se a uma recolha de dados diversificada: Um teste diagnóstico realizado antes da intervenção; A resolução de quatro problemas, sendo que dois foram resolvidos individualmente e os restantes em grupo na sala de aula; Um questionário direcionado aos alunos no final da intervenção; Os diferentes testes de avaliação sumativa realizados ao longo do ano.

Pela análise dos dados recolhidos, foi possível chegar a diferentes conclusões relativas aos objetivos propostos. Das diferentes estratégias a que os alunos recorreram, a mais frequente foi de modelação, com recurso à expressão do modelo. Por oposição, aquela a que menos recorreram foi a estratégia por tentativa e erro. Reconheceu-se como aspeto forte das estratégias de resolução usadas pelos alunos, o desenvolvimento do sentido crítico, como consequência da aquisição do hábito de verificar a aplicação do resultado à realidade. Observaram-se, como aspetos frágeis, a não consideração de casos específicos quando os alunos recorrem à generalização e a aplicação das fórmulas quando utilizam uma estratégia de modelação. Os alunos demonstraram determinar com relativa facilidade os dados presentes nos enunciados. No entanto, revelam dificuldades no estabelecimento de uma relação entre os dados e o objetivo do problema.

LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES: UNE EXPÉRIENCE AVEC DES ÉLÈVES DE 1ère ANNÉE D'UNE CLASSE DE MACS

Jorge Henrique Magalhães Teixeira
Maîtrise en Enseignement des Mathématiques dans le 3ème Cycle de l'Enseignement Primaire et dans l'Enseignement Secondaire
Université du Minho, 2013

RÉSUMÉ

La présente étude se concentre sur la résolution des problèmes mathématiques et elle résulte d'une intervention éducative dans une classe de première année, de la discipline de MACS, pendant l'enseignement des Modèles de Population. La recherche a été développée autour de trois objectifs: Identifier les stratégies de résolution de problèmes que les élèves utilisent quant ils ressoudent des problèmes mathématiques; Reconnaître les points forts et les points faibles des stratégies de résolution de problèmes utilisées par les étudiants; Lister et analyser les difficultés que les élèves révèlent avoir quant ils ressoudent des problèmes mathématiques.

Pour atteindre les objectifs de recherche, il a été réalisé une recueille de données diversifié: Un contrôle diagnostique avant l'intervention; La résolution de quatre problèmes, dont deux qui ont été résolus individuellement et les autres ont été résolus en groupe en salle de classe; Un questionnaire remis aux étudiants à la fin de l'intervention; Les différents contrôles d'évaluation menés tout au long de l'année.

En analysant les données recueillies, il a été possible d'arriver à des différentes conclusions concernant les objectifs proposés. Des différentes stratégies auxquelles les élèves ont recouru, la plus fréquente est celle de modélisation, en utilisant l'expression arithmétique du modèle. En revanche, la moins utilisée, est la stratégie par essais et erreurs. Il a été reconnu comme un point fort des stratégies de résolution utilisées par les élèves, le développement de leur esprit critique, en conséquence de l'acquisition de l'habitude de vérifier l'application du résultat à la réalité. Il a été observé, comme points faibles, la non-prise en compte des cas particuliers où les élèves recourent à la généralisation et, à l'application des formules quant ils utilisent une stratégie de modélisation. Les étudiants ont démontré déterminer assez facilement les données présentées par les énoncés. Cependant, ils révèlent des difficultés à établir une relation entre les données et l'objectif du problème.

ÍNDICE

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, que está dividido em três, apresentam-se no primeiro subcapítulo – *Tema, finalidades e objetivos*, o tema em estudo, as finalidades e os objetivos colocados. No segundo subcapítulo – *Pertinência*, apresenta-se no âmbito da Educação Matemática, a pertinência deste estudo. No terceiro subcapítulo – *Estrutura do relatório*, faz-se uma breve descrição da estrutura do presente relatório.

1.1. Tema, finalidades e objetivos

O tema em estudo é a resolução de problemas matemáticos. Este estudo foi desenvolvido no ano letivo 2011/2012 e é apoiado numa intervenção prática, realizada numa turma de uma escola do concelho de Braga, do 11.º ano da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Este projeto insere-se no âmbito da unidade curricular de Estágio Profissional, do segundo ano de estudos conducentes ao grau de mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

A escolha deste tema é devida a sua transversalidade e ao seu caráter essencial na Educação Matemática. Por trás desta escolha está a convicção de que a essência da Matemática está na atividade de exploração, formulação de conjeturas, observação e de experimentação, que como refere o NCTM (1994), são aspetos intrínsecos à resolução de problemas. A resolução de problemas deve assim estar sempre presente na sala de aula. Pretendo portanto iniciar uma investigação desafiante que acompanhará toda a minha carreira como docente.

Para a realização desta investigação, coloco os seguintes objetivos:

1 – Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam quando resolvem problemas matemáticos;

2 – Reconhecer os aspetos fortes e os aspetos frágeis das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos;

3 – Listar e analisar as dificuldades que os alunos revelam durante a resolução de problemas matemáticos.

1.2. Pertinência

A Matemática é considerada uma das três grandes áreas do conhecimento para a vida do século XXI (Carvalho, 2011). Estando a Matemática presente no nosso quotidiano em diversas formas é fundamental dotar os nossos alunos de uma sólida literacia matemática. Esta última é definida pela OECD (2002) como sendo a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo real, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática de problemas da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo. A resolução de problemas tem então uma importante dimensão. A United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), refere, no início da década de 90, através da sua *Declaração Mundial sobre Educação para Todos*, que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, colocando-a a par da leitura, da escrita e do cálculo. A importância da resolução de problemas é motivo de consenso e afirma-se com a sua transversalidade. Como defende o NCTM (1991),

> A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas (p.29).

O ensino através da resolução de problemas é uma forma eficaz para desenvolver o raciocínio, a capacidade de analisar, refletir, produzir, decidir e de motivar os alunos para o estudo da matemática. A resolução de problemas envolve os alunos na gestão dos seus próprios processos cognitivos. Desenvolver a capacidade de resolução de problemas é assim considerada uma das finalidades importantes do ensino da matemática. O programa da disciplina de MACS refere que “são determinantes as capacidades de usar a matemática em situações reais, formular e resolver problemas e comunicar ideias matemáticas” (ME-DES, 2001, p.8).

Tem-se referido que, além da necessidade de ensinar matemática para ensinar a resolver problemas, os alunos aprendem matemática resolvendo problemas. Nesta abordagem, a matemática não surge como uma imposição. A matemática surge in *statu nascendi*, revelando-se um processo de invenção, que no entanto “jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público” (Pólya, 1995, p.VI).

1.3. Estrutura do relatório

O presente Relatório de Estágio está dividido em quatro capítulos. No capítulo I – *Introdução*, para além de se descrever a estrutura do relatório, apresenta-se o tema, as suas finalidades e a pertinência do projeto.

O capítulo II – *Enquadramento contextual e teórico*, está dividido em três subcapítulos. No primeiro, *Contexto de intervenção*, caracterizam-se a escola e os alunos da turma onde se desenvolveu a intervenção de ensino. No segundo, *Plano geral de intervenção*, descrevem-se as estratégias de ensino e aprendizagem usadas durante a intervenção e as estratégias de investigação/avaliação da ação utilizadas para avaliar o processo de intervenção. No terceiro subcapítulo, *Enquadramento teórico*, elabora-se um marco de referência que justifica a relevância do projeto e as opções tomadas à luz da literatura consultada.

No capítulo III – *Intervenção*, descreve-se e analisa-se o processo de intervenção. Este capítulo está dividido em quatro subcapítulos. No primeiro, *Acompanhamento e avaliação dos alunos antes da intervenção*, exemplifica-se a análise feita às resoluções dos problemas realizadas pelos alunos e elabora-se, fruto do seu acompanhamento, uma avaliação qualitativa das suas resoluções dos problemas. No segundo subcapítulo, *Problemas propostos e análise das resoluções*, faz-se a análise, de modo a responder aos objetivos de investigação, a quatro problemas propostos aos alunos. No terceiro subcapítulo, *Situações na sala de aula*, descrevem-se três situações que evidenciam dificuldades dos alunos na resolução de problemas, descrições estas que contribuem para a construção de uma melhor resposta ao terceiro objetivo de investigação. Por fim, no quarto subcapítulo, *Perceções dos alunos relativamente à resolução de problemas matemáticos*, recorrendo à um questionário, avalia-se através de uma abordagem quantitativa, a consecução dos objetivos 1 e 3 deste projeto.

Por último, no capítulo IV – *Conclusões, Reflexões, Limitações e Recomendações*, faz-se um resumo do trabalho realizado e apresentam-se algumas reflexões finais que se consideram responder aos objetivos que nortearam este trabalho. Identificam-se também as principais limitações encontradas durante este estudo e algumas propostas para futuras investigações.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Neste capítulo, que está dividido em três secções, descreve-se o contexto de intervenção – a escola e os alunos da turma, o plano geral de intervenção – as estratégias de ensino-aprendizagem e de investigação/avaliação usadas durante a fase de intervenção e o enquadramento teórico – marco que justifica as opções tomadas à luz da literatura consultada.

2.1. Contexto de intervenção

Neste subcapítulo caracterizam-se a escola e os alunos da turma onde se desenvolveu a intervenção de ensino dos Modelos Populacionais, centrada na resolução de problemas.

2.1.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária situa-se numa das freguesias mais povoadas do concelho de Braga. A freguesia tem uma área aproximada de cinco quilómetros quadrados e uma população de cerca de trinta mil habitantes. A escola está enquadrada num meio de características urbanas.

Embora as origens da escola remontam ao final do século XIX, o edifício que a escola ocupa atualmente foi inaugurado em meados do século XX. A escola foi requalificada no ano de 2009 passando a possuir sessenta salas de aulas e uma área coberta de nove mil metros quadrados. As salas de aula dispõem de computadores de secretária para o docente, de quadro interativo e do quadro branco.

Tomando como referência o seu Projeto Educativo, frequentam-na mais de mil e oito centos alunos e nela lecionam duzentos e vinte e cinco professores, repartidos por setenta turmas funcionando entre ensino diurno e noturno. A escola oferece uma grande variedade de cursos, de entre os quais por exemplo, os cursos científico-humanístico, profissional e tecnológico. A escola possui também um centro de novas oportunidades (CNO). É uma escola de referência para alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE), ao nível da surdez e da cegueira.

Tomando como referência o seu Plano Anual de Atividades, verifica-se que a escola promove uma grande variedade de atividades relacionadas com a matemática, muitas das quais são coordenadas pelos responsáveis do seu clube de matemática. Através do clube de matemática, são coordenadas atividades tais como o campeonato de jogos matemáticos da escola ou ainda a pré-seleção de candidatos às Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Estas atividades são divulgadas nos diversos *placards* da escola, a qual reconhece ainda o mérito e prestigia os alunos divulgando os resultados dos concorrentes selecionados e dos concorrentes premiados no seu sítio na *internet*.

Na última avaliação externa, a escola obteve "muito bom", classificação máxima, nos cinco domínios de avaliação.

2.1.2. Caracterização dos alunos da turma

A turma, do 11.º ano do curso Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas é composta por vinte alunos. Ela é constituída maioritariamente por alunos do género feminino, num total de dezasseis sobre vinte alunos. A média das idades dos alunos, no início do ano letivo, era de dezasseis anos.

A maior parte dos pais dos alunos tem habilitações académicas entre o segundo e o terceiro ciclo do ensino básico, conforme se encontra resumido na Tabela 1.

Tabela 1 – Habilitações académicas dos pais

	Pai	Mãe	Percentagens
Ensino Básico	12	14	70%
Ensino Secundário	4	3	15%
Licenciatura ou grau superior	4	3	15%

Em termos de estado de saúde, quatro alunas apresentam problemas, nomeadamente enxaquecas frequentes, sinusite, bronquite e rinite alérgica. Uma aluna tem deficiência visual profunda.

Em relação à disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), estão inscritos dezasseis alunos. Oito alunos encaram-na como a disciplina em que têm maiores dificuldades. A turma caracteriza-se por ser constituída por alunos com níveis de capacidades heterogéneas relativamente à resolução de problemas.

Relativamente ao desempenho dos alunos na disciplina de MACS, os alunos apresentam em média, um nível positivo, como se pode observar na Tabela 2. Constata-se uma evolução

Tabela 2 – Desempenho dos alunos na disciplina de MACS

1.º Período	2.º Período	3.º Período
$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$
11,25	12,19	12,50

crescente relativamente às classificações dos alunos ao longo do primeiro, segundo e terceiro período com respetivamente 50%, 63% e 81% de notas positivas.

2.2. Plano geral de intervenção

Este subcapítulo está dividido em dois. No primeiro explicam-se as metodologias de ensino e de aprendizagem usadas durante a fase de intervenção. No segundo, listam-se as estratégias de investigação e de avaliação da ação.

2.2.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

A aprendizagem da Matemática pressupõe diferentes formas de trabalho (Ministério da Educação, 2007). Assim, no contexto deste estudo procurou-se que estas fossem diversificadas, contando com momentos de trabalho individual, em pequenos grupos de dois a quatro elementos e coletivamente, com todos os elementos do grupo turma. Dentro do conjunto dos momentos de trabalho individual contam-se a resolução individual de dois problemas matemáticos assim como os testes de avaliação. Uma parte relevante do trabalho realizado neste projeto focou as atividades realizadas pelos alunos organizados em grupos. Uma importante vantagem desta forma de trabalho, como referem Matos e Serrazina (1996), consiste numa maior reflexão e discussão entre os alunos. No caso da turma em estudo, os grupos estavam prédefinidos e esta forma de trabalho correspondia, antes mesmo da implementação do projeto, à adotada nas aulas da disciplina de MACS. O trabalho de grupo incidiu sobre a resolução das tarefas das fichas de trabalho propostas para as diferentes matérias abordadas no ano letivo. Quanto ao trabalho realizado coletivamente com os elementos da turma, privilegiou-se momentos de discussão resultantes da resolução de problemas. Estas discussões incidiram nos diferentes percursos de resolução, focando de modo implícito a pluralidade destes percursos e, de modo explícito as possíveis heurísticas usadas ou por utilizar.

A nível tecnológico, recorreu-se ao uso do retroprojetor ligado a um computador e ao uso da calculadora gráfica. Com o recurso a estas duas ferramentas, verificou-se que "com as potencialidades gráficas trazidas pelas tecnologias, os alunos e os professores passam a ter uma ferramenta de investigação poderosa que lhes permite fazer simulações facilmente, para estudar padrões gerais ou variabilidades individuais" (Carvalho, 2009, p. 25). A visualização é assim um processo fundamental e indispensável do raciocínio matemático. Com ela, como defendido por Amado e Carreira (2008), encorajam-se os alunos nas atividades de observar e de conjeturar e há a possibilidade de trabalharem com múltiplas representações. Tendo estes meios tecnológicos disponíveis na sala de aula, recorreu-se também ao uso do programa Geogebra. Este programa computacional foi desenvolvido para o ensino e a aprendizagem da Álgebra e da Geometria. Com a sua utilização, pretendeu-se atingir, entre outros objetivos, uma das recomendações expressas pelo NCTM (2008) que indica que "os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objetos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais" (p. 47). Relativamente ao uso da calculadora gráfica, Demana e Waits (1994) referem três formas de integrá-la no ensino da matemática: Começar por resolver um exercício ou um problema com papel e lápis e, seguidamente, utilizar a calculadora para verificar a resolução; Começar por resolver o exercício ou problema com a calculadora e, depois, confirmar ou completá-lo com papel e lápis; Resolver um exercício ou problema apenas com a calculadora, pois a sua resolução através de outros meios é impraticável ou mesmo impossível. As duas primeiras formas de integração são essenciais na resolução de problemas. A primeira constitui um passo fundamental na resolução de um problema, a verificação da solução. A segunda desenvolve hábitos tais como a elaboração de conjeturas ou hipóteses. Os autores ainda referem a importância deste instrumento como motivação dos alunos e gerador da sua autoconfiança.

2.2.2. Estratégias de investigação/avaliação da ação

Pelas suas características, este plano de intervenção corresponde a um estudo de caso de natureza interpretativa/qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa tem cinco características: O investigador é o principal responsável pela recolha dos dados no ambiente natural; Os dados recolhidos são essencialmente descritivos; Utilizando metodologias qualitativas, o investigador interessa-se mais no processo do que no resultado; Os resultados são analisados de forma indutiva; O investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Já o estudo de caso é caracterizado por Coutinho e Chaves (2002) como se tratando de um plano de investigação envolvendo o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida, o caso, podendo este ser entre outros, um grupo ou uma comunidade. Segundo Ponte (1994), "visa conhecer em profundidade o seu *como* e os seu *porquês*, evidenciando a sua unidade e identidade próprias" (p.3). O caso foco desta investigação é o grupo turma, constituído pelos dezasseis alunos que frequentam a disciplina de MACS. A análise das suas resoluções dos problemas é o principal objetivo, com vista a perceber as estratégias utilizadas assim como as dificuldades encontradas durante todo o processo de resolução. Esta análise constituirá o ponto de partida para conjeturar, em investigações futuras, sobre como ajudar os alunos a ultrapassar essas dificuldades. A investigação participante ocorre dentro da sala de aula e dá origem a momentos de reflexões pós-aula. Para a avaliação da intervenção recorreu-se a estratégias/instrumentos de recolha de informação diversificados. Os dados apresentados foram obtidos através: Da observação participante e sistemática; Da recolha das resoluções de dois problemas; Da recolha de todos os testes de avaliação; Da elaboração de um questionário proposto aos alunos.

Observação

A observação é participante quando é feita pelo investigador inserido no grupo observado, com interação direta com os seus elementos. Para Lapassad (2001), a expressão observação participante tende a designar o trabalho de campo no seu conjunto, desde a chegada do pesquisador ao campo da investigação, quando, então, inicia as negociações que lhe darão acesso a esse campo, até o término do estudo, depois de uma longa estada no cenário da pesquisa. Esta, foi realizada com registo escrito em diário de bordo do investigador e durante todo o ano letivo 2011/2012. Os momentos de conversação possibilitaram o entendimento de raciocínios na base da resolução de problemas de alguns alunos assim como perceber algumas das suas dificuldades. O registo é tanto quanto possível objetivo. Ele ocorreu durante as aulas lecionadas tanto pelo professor cooperante tanto pelo investigador, mas também durante momentos de reflexão pós-aula. A observação sistemática incidiu principalmente nas heurísticas utilizadas pelos alunos durantes os problemas matemáticos propostos.

Problemas com entrega da resolução

Foram previamente preparados dois problemas. Ambas as folhas com o enunciado dos problemas, tinham espaço suficiente para que os alunos resolvessem o problema na própria folha. Findo o tempo estipulado para a resolução de cada problema, os alunos entregaram as suas resoluções que foram fotocopiadas e devolvidas aos alunos. Para cada problema foi proposta uma possível resolução no quadro branco, discutindo com os elementos do grupo turma, as suas resoluções.

Testes de avaliação

Outra importante fonte de informação foi o teste de avaliação. As resoluções do teste, antes de serem devolvidas aos alunos, foram fotocopiadas para posterior análise. Decidiu-se recolher os testes realizados ao longo do ano letivo, mesmo após o período de intervenção. Este período de tempo alargado permitiu uma melhor comparação das resoluções de cada aluno.

Questionário

Por fim, como técnica baseada na conversação, elaborou-se um questionário (Anexo 3). De acordo com Tuckman (2002) os questionários são um instrumento poderoso de investigação em educação porque permitem transformar em dados a informação diretamente comunicada por um sujeito. O questionário utilizado é composto por cinquenta e três afirmações divididas em dez partes. A primeira parte tem como objetivo comprovar algumas características, listadas por Whimbey (1986), diferenciadoras entre bons e fracos *resolvedores* (assumido neste trabalho como sendo aquele que resolve) de problemas. Na segunda e na terceira parte, tenta-se perceber as preferências dos alunos relativamente à algumas estratégias de ensino usadas pelo professor durante as aulas. Na quarta parte, tenciona-se compreender as conceções dos alunos relativamente a definição do conceito de problema. Da quinta a oitava parte, pretende-se verificar que sentimentos desperta nos alunos a resolução de problemas, bem como quais as estratégias, os meios e os métodos aos quais os alunos recorrem. Na nona parte pede-se aos alunos que identifiquem as suas dificuldades na resolução de problemas. Finalmente, a décima parte tem como objetivo verificar a importância que os alunos atribuem à resolução de problemas. Para verificar o nível de concordância dos inquiridos usou-se uma escala de Lickert. Cada afirmação é avaliada selecionando um dos cinco itens possíveis: Discordo Totalmente; Discordo; Indiferente; Concordo; Concordo Totalmente. Foi uma escolha ponderada manter o item "Indiferente" de modo a não forçar uma resposta positiva ou negativa.

2.3. Enquadramento teórico

Neste subcapítulo abordam-se as definições dos conceitos de problema e de resolução de problemas. Referem-se as classificações dos diferentes tipos de problemas de alguns autores e os fatores que influenciam a dificuldade dos problemas. São também referidos alguns modelos de resolução de problemas e as características que diferenciam os indivíduos considerados bons *resolvedores* de problemas daqueles considerados menos eficazes.

2.3.1. Problemas e resolução de problemas

Os problemas matemáticos têm sido colocados desde os tempos antigos como o comprovam o papiro de Ahmes, que data de cerca de 1650 a. C., ou ainda, o documento chinês Nine Sections, datado de cerca de 1000 a. C. No entanto, a resolução de problemas no ensino da Matemática é uma área de estudo relativamente recente, como salientam Stanic e Kilpatrick (1989), "Os problemas têm ocupado um lugar central no currículo da Matemática escolar desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não..."(p.1). Abrantes (1989) escreve ainda "O reconhecimento de que a resolução de problemas é um motor do desenvolvimento da Matemática ... não são ideias novas. O famoso livro de George Pólya, *How To Solve It*, considerado como um marco de referência, foi publicado pela primeira vez em 1945" (p.7).

No panorama internacional, a década de 80 deu particular ênfase a resolução de problemas. Na sua agenda para a ação, o NCTM (1980) proclamou amplamente que a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar.

Em Portugal, em 1986 a Lei de Base do Sistema Educativo (LBSE) veio acentuar a tendência de valorizar a resolução de problemas, nomeadamente ao nível dos objetivos. Como refere Martins (2000), os objetivos manifestam uma tendência para transformar um ensino de conteúdos num ensino em função da aquisição e desenvolvimento de métodos e processos pelos alunos e, simultaneamente passar de uma aprendizagem recetiva para uma aprendizagem por descoberta.

Abordando a complexa temática da resolução de problemas torna-se pertinente, senão necessário esclarecer as definições dos conceitos de problema e de resolução de problemas.

Para Lester (1980) um *problema* é uma situação com a qual o indivíduo é confrontado, em que não dispõe de um método de resolução imediato e, que quer ou precisa dar resposta. Este autor sublinha a necessidade do indivíduo empenhar-se ativamente na procura de uma solução. Kilpatrick (1985) refere também uma perspetiva psicológica, onde o problema surge como uma atividade de um *resolvedor* motivado, realçando a importância de fatores afetivos. Pólya (1980) refere que ter um problema significa procurar uma ação apropriada de forma a atingir um objetivo claramente definido mas não imediatamente atingível. Para este autor, onde não há dificuldade, não há problema. Segundo o NCTM (1987) um problema é uma situação na qual, para o indivíduo ou grupo a que se refere, uma ou mais estratégias têm ainda que ser desenvolvidas. Estas podem ser, entre outras, a construção de um modelo ou de uma tabela, a simplificação, a determinação de padrões (Lopes, 2002). Numa perspetiva mais abrangente do que a matemática, Mayer (1996) define os problemas com três características: Dados; Objetivos; Obstáculos. Um problema é definido por Pires (2001) como sendo uma tarefa cujo objetivo é bem definido e o método de resolução é desconhecido. De acordo com Ponte (2005) um problema é uma tarefa fechada com elevado desafio, sendo fechada porque nela os dados e o objetivo são claramente expressados e, desafiante devido à perceção de dificuldade que tem quem a resolve.

Nesta tentativa de esclarecer a noção de problema, é importante fazer a distinção com um outro conceito frequentemente confundido e motivo de discórdia: o conceito de *exercício*. A primeira tentação seria de distinguir exercício de problema pelo grau de dificuldade. No entanto, existem exercícios com grau de dificuldade superior a de alguns problemas, envolvendo a aplicação de algoritmos já conhecidos mas complexos. Portanto, como refere Palhares (1997) a dificuldade não é um fator de separação entre os dois conceitos. Segundo este autor, o critério essencial que distingue um problema de um exercício é o conhecimento prévio dos procedimentos a aplicar. Num problema não existe esse conhecimento embora num exercício exista esse conhecimento e o indivíduo só é confrontado com as questões técnicas da sua aplicação. Como escreve Kantowski (1981), um problema é uma situação que difere de um exercício pelo fato do aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução. De acordo com Lopes (1994), os exercícios e os problemas distinguem-se pela sua utilidade na educação. Para este autor, um exercício é utilizado para operacionalizar conceitos, treinar algoritmos, técnicas e regras. Já um problema deve ser usado para desenvolver estratégias de raciocínio, permitir o desenvolvimento de conceitos e de conhecimentos processuais. Lopes (1994) acrescenta ainda que as diferenças principais entre os dois conceitos residem no "tipo e quantidade de informação fornecida; contexto utilizado; conhecimento de uma solução e tipo de solução; processo de abordagem e objetivos educacionais que se pretendem atingir" (p.26). Kantowski (1974) refere que o problema de um pode ser o exercício de outro e a frustração de um terceiro. Esta frustração pode surgir da falta de motivação consequente da falta de conhecimentos e capacidades para resolver o problema. Assim os exercícios distinguem-se dos problemas não só por fatores cognitivos mas também por fatores afetivos. Schoenfeld (1991), realça a dificuldade de definir o conceito de problema afirmando que se for pedido a sete educadores matemáticos para definir problema, é muito provável que se obtenha nove definições diferentes.

Para Wheatley (1984), a *resolução de problemas* é aquilo que se faz quando não se sabe o que fazer. De acordo com Pólya (1968), a resolução de problemas é " encontrar uma saída para uma dificuldade, contornar um obstáculo, atingir um objetivo quando à partida não seria atingido" (p. ix). Kantowski (1974) distingue como aspetos fundamentais da resolução de problemas, o processo usado e o produto ou solução. Segundo o NCTM (2008), a resolução de problemas implica o envolvimento do aluno numa tarefa, cujo método de resolução é desconhecido. Durante a resolução do problema, o aluno deverá explorar os seus conhecimentos e frequentemente através deste processo, ele desenvolverá novos conhecimentos matemáticos.

Adotaremos assim a resolução de problemas como sendo a aplicação de processos cognitivos e a manipulação de conhecimentos. Estes processos são dirigidos com o objetivo de encontrar uma solução válida e a resolução é pessoal uma vez que a dificuldade desta está dependente dos conhecimentos e da experiência do indivíduo.

2.3.2. Tipos de problemas

Frederikson (1984) distingue dois tipos de problemas em função da sua estrutura: os problemas bem estruturados (well-structured problems) e os problemas mal estruturados (ill-structured problems). Para a resolução do primeiro tipo de problemas é apenas necessário a informação contida no enunciado e, eventualmente, a informação armazenada na memória a longo prazo. Já nos problemas mal estruturados, o enunciado não é claro e pode não conter toda a informação necessária para a resolução do problema. Sternberg (1998), classificando os problemas do mesmo modo que Frederikson, refere a utilização de heurísticas e de algoritmos para a resolução dos problemas bem estruturados. Para o autor os algoritmos, por oposição às heurísticas, levam a soluções precisas, constituindo este facto uma vantagem sobre as heurísticas. Para os problemas mal estruturados o autor refere o recurso aos *insights.* Ele define-os com sendo uma súbita compreensão do problema ou uma súbita perceção da sua estrutura, que leva à resolução do problema.

Ernest (1992) apresenta uma possível classificação dos problemas, cujo papel centra-se no professor ou no aluno, segundo três tipos: a descoberta guiada, a resolução de problemas, e o *problem posing*. Para este autor o primeiro tipo de problemas chamado *descoberta guiada,* consiste no professor colocar problemas ou escolher situações com um objetivo em mente. O papel do aluno é seguir as orientações do professor. O segundo tipo de problemas *resolução de* *problemas*, corresponde à situação em que o professor coloca o problema e facilita a sua resolução. Neste caso o aluno procura a sua própria via de resolução. No terceiro e último tipo de problemas, tem-se o *problem posing*, que poder-se-á traduzir-se por *formulação de problemas*. Neste tipo de problemas o professor cria um contexto inicial favorável para que os alunos formulem e resolvam os seus próprios problemas.

Charles, Lester e O'Daffer (1994) distinguem quatro tipos de problemas matemáticos: Os problemas de um passo (one-step problems); Os problemas de vários passos (multiple-step problems); Os problemas de processo; Os problemas de aplicação. Os problemas de um passo diferem dos problemas de vários passos pelo número de operações elementares envolvidas. Nos *problemas de um passo* recorre-se apenas a uma operação elementar. A principal estratégia de resolução deste tipo de problemas consiste na seleção do tipo de operação, isto é, a seleção entre a soma, a subtração, a divisão ou a multiplicação. Já nos *problemas de vários passos*, que requerem a seleção de várias operações elementares, a principal estratégia de resolução consiste na seleção das várias operações elementares. Segundo os autores, estes tipos de problemas são particularmente úteis para fornecer experiência de tradução de *problemas de histórias* em expressões numéricas envolvendo operações elementares. Estes tipos de problemas são também designados por *word problems*, problemas de palavras. Segue-se um enunciado de um problema de vários passos: "A Carolina tem vinte e três rebuçados. Ela recebe seis rebuçados da Joana. Se a Carolina dá quatro rebuçados ao João, com quantos rebuçados fica ela?". O terceiro tipo de problemas, *os problemas de processo,* não se resolve por aplicação direta de um algoritmo. Neste tipo de problemas a solução não está explicita no enunciado. Ferreira (2004), refere que dificilmente se resolve este tipo de problemas sem utilizar estratégias de resolução como por exemplo descobrir um padrão, trabalhar do fim para o princípio, ou fazer um diagrama. São normalmente considerados problemas interessantes e desafiadores. Este tipo de problemas não pode ser resolvido pela simples escolha de uma ou várias operações elementares. Segue-se o enunciado, retirado e adaptado da *internet* http://magiadamatematica.com/, de um problema de processo: "De todos os rectângulos, cujos lados são expressos por números inteiros de centímetros, que possuem perímetro de 30 cm, qual o que possui maior área?"

Por fim, o quarto tipo de problemas identificado pelos autores, *os problemas de aplicação*, requere a utilização de dados não presentes no enunciado do problema. A tomada de decisão surge como consequência da falta de informações. É necessário, em geral, mais tempo nesta situação do que noutro tipo de problemas. Para este tipo de problemas deve existir uma ligação com a vida real. Cria-se como exemplo o seguinte enunciado: “Organiza um torneio de futebol, sabendo que participarão nove equipas”.

Palhares (1997) constrói uma classificação exaustiva de problemas, baseada segundo o procedimento. Este autor realça a importância do caráter relativo do conceito de problema e da sua correspondente classificação. Dependendo da classe de indivíduos a quem se destina, um problema pode variar de tipo. É por isso importante que o grupo de indivíduos a quem é submetido o problema seja conhecido pelo formulador/apresentador/investigador, papéis estes que frequentemente são desempenhados por várias pessoas. O autor distingue sete tipos de problemas: os problemas de processo; os problemas de conteúdo; os problemas de capacidades; problemas tipo puzzle; problemas de aplicação; problemas abertos; e os problemas de aparato experimental.

Os *problemas de processo*, já referidos anteriormente, coincidem no seu entendimento. Os *problemas de conteúdo* requerem o uso de conhecimentos matemáticos recentemente adquiridos ou não adquiridos totalmente. Considere-se o exemplo: “Doze professores cumprimentam-se no primeiro dia de aulas. Quantos apertos de mão há?”. Os *problemas de capacidades* requerem o uso de capacidades matemáticas tais como o cálculo mental ou a estimativa. Elabora-se como exemplo o seguinte enunciado: “Calcule mentalmente o valor da expressão $\frac{18}{3} - 2 + \frac{2}{5}$“.

Aos *problemas do tipo puzzle*, correspondem aqueles que requerem o alargamento do espaço de resolução. Abrantes (1989) exemplifica este tipo de problemas com o seguinte enunciado: “Com seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros”. Ao quinto tipo de problemas correspondem os *problemas de aplicação*, também já referidos e cujo entendimento é idêntico. Para os *problemas abertos,* é necessária uma escolha ponderada entre vários percursos possíveis. Elabora-se o exemplo com o seguinte enunciado: “Tendo disponível trezentos euros, organiza um jantar para os alunos da tua turma”. Ao sétimo tipo de problemas, que requerem o uso de esquemas investigativos, correspondem *os problemas de aparato experimental*. Para este tipo de problemas requer-se o uso de métodos próprios das ciências experimentais. Consideremos o exemplo cujo enunciado foi retirado e adaptado da *internet,* www.fisica.net: “Constrói um pêndulo com um fio de setenta centímetros de comprimento e com uma esfera que pese trinta gramas. Considerando vários comprimentos do fio do pêndulo, descobre as relações entre: 1) o tempo gasto nas oscilações e o comprimento do fio do pêndulo; 2) a amplitude das oscilações e o comprimento do fio do pêndulo".

Borasi, referido por Abrantes (1989), efetua uma classificação dos problemas de acordo com quatro aspetos: o contexto, a formulação, a solução e o método. Abrantes (1989) distingue sete tipos de problemas: os word problems, traduzido por problemas de palavras; os problemas para equacionar; os problemas para demonstrar; os problemas para descobrir; os problemas da vida real; as situações problemáticas; e as situações.

De modo a ser mais ilustrativo, reproduzir-se-ão nesta secção, os exemplos apresentados por Abrantes (1989).

Contrariamente àquilo que se pode observar no modelo de Borasi, resumido na Tabela 3, Abrantes (1989) não considera os exercícios como sendo um tipo de problemas. Os *exercícios* de acordo com o referido pelo autor implicam a aplicação de algoritmos conhecidos, a solução é única e exata e o contexto não está definido. É o que acontece por exemplo, no caso "Calcular o valor da expressão $x^2 - 3x$ para $x = 2$". Os exercícios favorecem a interiorização de procedimentos e algoritmos para a condução a uma solução. Segundo o autor a resolução de muitos exercícios não contribui para desenvolver capacidades de raciocínio ou de resolução de problemas (Abrantes, 1989, p.8).

O primeiro tipo de problemas que refere Abrantes (1989) são os *problemas de palavras*. Os problemas de palavras transformam-se facilmente em exercícios uma vez que se distinguem dos exercícios unicamente por terem um contexto explícito no enunciado, como por exemplo, "Um cliente comprou num dia 2.3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1.5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?". Este tipo de problemas favorece a atribuição de significados às operações matemáticas elementares. Charles (2011), considerando que a capacidade de resolução deste tipo de problema é um alicerce fundamental para apoiar o sucesso dos estudantes na álgebra, defende uma abordagem visual para a resolução deste tipo de problemas. Este autor sugere preferencialmente a utilização de modelos de diagramas de barras focado nas características estruturais dos problemas de palavras. Ele alerta para os riscos de uma abordagem por palavras-chave, exemplificando a tendência dos alunos usarem por defeito a soma sempre que surge num enunciado as palavras *no total*.

O segundo tipo de problemas, os *problemas para equacionar*, é semelhante ao anterior. Neste tipo de problemas o enunciado é munido de um contexto e os objetivos consistem geralmente em determinar a incógnita, nomeá-la adequadamente e traduzir o enunciado numa equação. Tomemos o seguinte exemplo "O João tem a metade da idade do pai. A soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?".

O terceiro tipo de problemas, os *problemas de demonstração*, pode constituir um ambiente rico em aprendizagens. Neste tipo de problemas é necessário, além de descobrir um caminho que leve a demonstração, uma apresentação formal da demonstração. A sua formulação é explícita e a solução é única. Considera-se o exemplo "Usando os casos de semelhança, mostre que a altura relativa à hipotenusa divide um triângulo rectângulo em dois triângulos semelhantes".

O autor refere como quarto tipo de problemas, os *problemas para descobrir*. Para a sua resolução é frequentemente necessário uma perceção súbita do percurso, um *Insight*. Este último ocorre depois de reorganizar a informação, quando existe a descoberta súbita do caminho para obter a solução. Consideremos o exemplo "usando apenas seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais".

O quinto tipo de problemas, os *problemas da vida real,* corresponde a *matematização* de diversas situações. Para este tipo de problemas é necessário criar modelos matemáticos e recorrer a vários conhecimentos. Considera-se o seguinte exemplo, "Construir a planta de um estádio - um campo de futebol e uma pista de atletismo". Neste tipo de problemas poderão existir várias soluções aceitáveis e estas poderão ser aproximadas.

No sexto tipo de problemas, as *situações problemáticas*, o enunciado é vago e podem existir várias soluções. O primeiro passo para a solução consiste em definir corretamente o problema. Estes problemas são particularmente propícios para levar os alunos a conjeturarem, a fazerem questões e a formularem *subproblemas*. Considere-se o seguinte exemplo "O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos produto por soma".

Finalmente, o sétimo tipo de problemas, *as situações*, correspondem a enunciados onde não está formulado qualquer problema. Existe nestes tipos de problemas um ambiente propício a exploração do contexto. Um exemplo de situação pode ser uma página cheia de números, posicionados numa determinada ordem.

Ponte (2005) apresentou uma classificação das tarefas, relacionando o seu grau de desafio com o seu grau de abertura. Considerando esta classificação, poder-se-ão atribuir aos dois últimos tipos de problemas referido por Abrantes (1989), as *situações problemáticas* e as *situações,* a classificação de explorações ou de investigações. Ponte (2005) classifica as explorações e as investigações como sendo ambas tarefas com elevado grau de abertura. No entanto estas tarefas diferenciam-se pelo seu grau de desafio, sendo este reduzido nas tarefas de exploração e elevado nas tarefas de investigação.

Reproduz-se na Tabela 3 o resumo apresentado por Abrantes (1989), do modelo de Borasi.

Tabela 3 – Modelo de classificação de problemas de Borasi, apresentado por Abrantes

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Contexto</th><th>Formulação</th><th>Solução</th><th>Método</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Tipo de problemas</td><td>Exercício</td><td>Inexistente</td><td rowspan="5">Explícita e fechada</td><td rowspan="5">Única e exata</td><td rowspan="4">Uso de algoritmos previamente conhecidos
...</td></tr>
<tr><td>De palavras</td><td rowspan="4">Totalmente explícito no enunciado</td></tr>
<tr><td>Para equacionar</td></tr>
<tr><td>Para demonstrar</td></tr>
<tr><td>Para descobrir</td><td>Insight</td></tr>
<tr><td>Da vida real</td><td rowspan="3">Só em parte no enunciado</td><td rowspan="2">Implícita e aberta</td><td rowspan="3">Várias</td><td rowspan="3">Exploração do contexto
Criação de problemas
...</td></tr>
<tr><td>Situação problemática</td></tr>
<tr><td>Situação</td><td>Inexistente</td></tr>
</table>

Tao (2008), diferencia três tipos principais de problemas. Ele distingue problemas do tipo: “Mostre que...” ou “calcule...”. Neste tipo de problemas é necessário provar a veracidade de determinada afirmação, ou manipular uma expressão de modo a obter determinado resultado. Nestes problemas os dados são fornecidos e o objetivo é claramente especificado; “Encontre...” ou “encontre todos...”, em que o objetivo consiste em determinar algum objeto, ou todos, satisfazendo certas propriedades. A estratégia de resolução por tentativa e erro costuma funcionar neste tipo de problemas. Tenta-se um primeiro palpite, que caso não satisfaça totalmente, possibilita um outro palpite mais próximo da solução; “Existe ou não...” onde se deve provar uma afirmação ou fornecer um contra-exemplo. Este tipo de problemas é usualmente mais difícil devido ao seu caminho ser mais incerto. Primeiro deve-se decidir se existe ou não o tal objeto e depois é necessário provar a sua existência ou encontrar um contra-exemplo.

2.3.3. Dificuldades na resolução de problemas

Quanto mais tempo uma dificuldade de aprendizagem de algum estudante permanece sem ser reconhecida, maior probabilidade terão os problemas de aumentar. Por sua vez, estes últimos provocarão frustração e reduzirão o estímulo, a autoconfiança e o entusiasmo do estudante para com a escola. É portanto fundamental o diagnóstico precoce destas dificuldades.

Do estudo de Whimbey (1986), ressaltam algumas dificuldades relativas à resolução de problemas. Estas prendem-se com os *hábitos de leitura*. Os estudantes de baixa aptidão de resolução de problemas abordam os enunciados de modo distinto dos estudantes mais eficazes. Identificam-se duas características importantes. A primeira característica consiste na informação retida após a primeira leitura e única em muitos casos. Whimbey (1986) usa a expressão *one-shot thinking*, que poder-se-á traduzir por raciocínio da primeira impressão. Entende-se por isto que a primeira tentativa de compreensão do problema é suscetível de ser a última, levando aos erros inevitáveis da má compreensão. A segunda característica apontada por Whimbey (1986) é que os estudantes de baixa aptidão são mais tolerantes com a sua própria falta de conhecimento. Se não percebem alguma coisa, eles não se importam, passando simplesmente à frente.

A interpretação do enunciado envolve múltiplos aspetos cognitivos que representam a capacidade de projectar a compreensão da sua mensagem, Silva (2011). Assim, ler não representa apenas a capacidade de descodificar letras, mas envolve também a capacidade de análise que permite estabelecer diferentes ligações.

Na resolução de problemas é necessário ultrapassar diversos obstáculos que vão surgindo no caminho. Sternberg (1998) destaca três obstáculos que podem ocorrer individualmente ou em conjugação: As pré-configurações e as fixações mentais (*mental sets and fixation*). Este impedimento corresponde à fixação do indivíduo numa estratégia ou método que foi aplicado em problemas anteriores, mas que não se adequa ao novo problema em particular; A fixação funcional (*functional fixedness*). Uma das pré-configurações mentais segundo o autor é a incapacidade do sujeito reconhecer conhecimentos de que dispõe, utilizados num determinado contexto e aplicá-los numa outra função e até por vezes de maneira diferente; A transferência negativa (*negative transfer*). Esta ocorre quando o conhecimento anterior pode levar a uma maior dificuldade em adquirir e armazenar novo conhecimento.

2.3.4. Modelos de resolução de problemas

Num âmbito mais abrangente do que a matemática, Wallas (1926), referido por Mayer (1996) elabora um modelo de resolução de problemas constituído por quatro fases: Preparação; Incubação; Iluminação; e Verificação.

Na fase de *preparação* a informação é recolhida e as primeiras tentativas de resolução são feitas. Na fase de *incubação* o problema é posto de lado. Trabalha-se noutras atividades enquanto o problema é tratado pelo nosso subconsciente. Na fase de *iluminação* ocorre uma aparição do caminho que leva a solução. Finalmente, na fase de *verificação*, verifica-se a solução e confere-se que ela "funciona". Mayer (1996) refere que o modelo carece de experiências psicológicas para suportar os resultados destas quatro fases e, alerta que infelizmente estas quatro fases são baseadas na introspeção de Wallas e de outros sobre o que pensam que fizeram durante a resolução de problemas.

Sternberg (1997) define a resolução de problemas num ciclo de seis passos. O autor justifica a ocorrência de um ciclo na medida em que uma solução é frequentemente a base de um outro problema. Estes passos podem não ocorrer na sequência que se reproduz mas o autor alerta que é muito provável que se atravesse cada um deles. Os seis passos são: Reconhecimento do problema; Definição do problema; Estabelecimento de uma estratégia de resolução do problema; Representação da informação; Atribuição de recursos; Monitorização e avaliação

O *reconhecimento do problema* é talvez o passo mais importante uma vez que só será feito um esforço por quem deverá resolver o problema após o seu reconhecimento. A *definição do problema* surge uma vez reconhecido a existência de um problema, sendo necessário defini-lo corretamente. Uma má definição do problema leva a uma resolução mal orientada não atingindo o seu propósito inicial de resolução. Esta má definição pode levar a uma perda de tempo considerável e, o autor alerta por isso a importância de investir o tempo necessário na definição do problema. O *estabelecimento de uma estratégia de resolução do problema* corresponde ao passo onde se decide como se irá proceder para alcançar a solução do problema. No passo da *representação da informação* é necessário a perceção e a organização mental da informação relevante. No passo da *atribuição de recursos* faz-se a seleção dos recursos a atribuir. Uma boa atribuição dos recursos aumenta a eficácia de resolução dos problemas. Os recursos são variados e são por exemplo o tempo ou a concentração durante a leitura de um enunciado. O sexto passo corresponde a *monitorização e avaliação.* Sternberg (1998), divide este último passo em dois. O autor define a monitorização como sendo o acompanhamento dos progressos durante o desenvolvimento da resolução do problema. Este acompanhamento permite observar se a resolução está a aproximar-se da solução. Atingindo uma solução, é necessário avaliá-la. Esta avaliação pode ser imediata ou realizada mais tarde. Este passo permite frequentemente observar que a solução está incorreta ou incompleta.

Já numa perspetiva matemática, Pólya (1995) apresenta no seu livro *How to solve it*, editado em 1945, um modelo de resolução de problemas em quatro fases: Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano; Retrospecção.

A *compreensão do problema* corresponde a fase onde é necessário compreender o problema. Esta compreensão passa pela identificação da incógnita e das condições impostas assim como a consideração de todos os aspetos relevantes. O autor refere a importância do aluno estar motivado e querer resolver o problema.

Na fase do *estabelecimento de um plano*, elabora-se um plano que permita encontrar uma solução. O autor refere a importância de pensar em problemas semelhante e já resolvidos anteriormente. Algumas das heurísticas sugeridas consistem na reformulação do problema por generalizações ou particularizações.

A *execução do plano* corresponde a fase em que o aluno implementa o plano de forma a atingir a solução do problema. O autor chama a atenção para o facto de ser muito provável que um aluno venha a esquecer um plano aceite por influência do seu professor. Contrariamente, se o aluno elaborou o plano pelos seus próprios meios, mesmo com alguma ajuda do professor, então dificilmente esquecerá o seu plano.

A fase da *retrospecção* corresponde a avaliação da solução obtida. É necessário voltar atrás e verificar os resultados. Esta fase é infelizmente muitas vezes esquecida. O autor refere a sua importância na consolidação dos conhecimentos bem como no seu papel de desenvolvimento da autoconfiança dos alunos.

Vários outros modelos de resolução de problemas foram apresentados. Muitos deles diferem na quantidade de fases apresentadas no modelo de Pólya, considerado o mais representativo. Este motivo levou a adotar o modelo de Pólya durante o acompanhamento dos alunos na resolução dos problemas.

2.3.5. Características dos bons resolvedores de problemas

Whimbey (1986), lista as seguintes principais características dos bons *resolvedores* de problemas: O otimismo; A preocupação com a exatidão; A divisão do problema em partes; Evitar o adivinhar; A atividade na resolução de problemas.

O *otimismo* corresponde a capacidade dos *resolvedores* de problemas eficazes acreditarem que a análise cuidada e persistente de um problema possibilita a sua resolução.

Contrariamente, os considerados fracos *resolvedores* de problemas, pensam que “ou se sabe ou não se sabe e, caso não se saiba, não interessa sequer tentar”.

A *preocupação com a exatidão* é outra característica apontada pelo autor, isto é, os bons *resolvedores* de problemas são cuidadosos. Asseguram-se de que perceberam as questões. Releem o enunciado se necessário, verificam os dados fornecidos. Verificam cada passo executado e voltam a verificar se necessário. Em oposição, os *resolvedores* ineficazes não tomam muita atenção aos detalhes e a precisão. Estes por vezes, sem mesmo entenderem o problema, seguem um caminho revelado por uma intuição súbita, sem mesmo verificar se é correta.

A *divisão do problema em partes* corresponde a outra característica dos bons *resolvedores* de problemas. Estes, tentam subdividir os problemas complexos. Criam problemas mais simples de modo a progredirem na resolução e iniciarem um caminho que os leve a uma solução final. Em oposição, os fracos *resolvedores* de problemas tentam resolver um problema complexo de uma só vez. É improvável que tentem técnicas diferentes para entenderem ou representarem o problema.

Os bons *resolvedores* de problemas *evitam o adivinhar*. Ao confrontar-se com uma dificuldade tentam caminhos alternativos, procuram ultrapassar a dificuldade. No entanto, os fracos *resolvedores* de problemas, ao encarar uma dificuldade, têm tendência para tentar adivinhar a solução.

A atividade na resolução de problemas é outra característica diferenciadora. Os bons *resolvedores* de problemas falam com eles próprios, contam pelos dedos, fazem desenhos, diagramas, sublinham ou pintam as palavras importantes. Os fracos *resolvedores* de problemas, não têm estes hábitos de trabalho.

Já a investigação de Schoenfeld referida por Lester (1993), sugere que os bons *resolvedores* de problemas podem distinguir-se dos menos bons *resolvedores* em pelo menos cinco aspetos importantes: (i) revelam um *conhecimento mais profundo*, estabelecendo conexões, e organizado por esquemas; (ii) *focam a sua atenção* nas características estruturais dos problemas distinguindo-as das superficiais; (iii) *reconhecem as suas limitações*, estando conscientes acerca dos seus pontos fortes e frágeis; (iv) *controlam e regulam* os seus esforços de resolução; (v) tendem a preocupar-se com a obtenção de *soluções elegantes*.

Schoenfeld (1985), identifica ainda quatro tipos de conhecimentos necessários para o *resolvedor* de problemas matemáticos bem-sucedido: Os recursos; As heurísticas; O controlo; As conceções.

Os *recursos* são os conhecimentos de factos e de procedimentos matemáticos. As *heurísticas* correspondem às técnicas e estratégias de resolução de problemas, como por exemplo o raciocínio dedutivo, trabalhar de trás para a frente, desenhar diagramas. O *controlo*, que se entende pela habilidade de tomar decisões sobre que técnica utilizar, quando e como. As *conceções* ou *The Beliefs*, correspondem à "visão do mundo" que determina atitudes e abordagens para um problema. Destes quatro aspetos, três estão diretamente relacionados com a metacognição: estratégias de resolução, verificação (controlo) e sistemas de conceções/preconceitos (Borralho, 1990).

Segundo Sternberg (1998), existem vários fatores que fazem com que um *expert* tenha mais facilidade de resolver um problema do que um *novice*. Um desses fatores é o uso dos conhecimentos. Os *experts* têm esquemas mnésicos que contêm muitos conhecimentos sobre a área em questão, estando esses conhecimentos já muito bem organizados e interligados. Preocupam-se mais e investem mais tempo na representação do problema do que na procura de uma estratégia. Estas representações são sofisticadas e baseadas em semelhanças estruturais de problemas resolvidos anteriormente. Este investimento de tempo na fase inicial da resolução permite um desenvolvimento mais rápido nas fases seguintes. Já os *novices* têm unidades de conhecimento pouco organizadas e interligadas. Utilizam esquemas improvisados e investem pouco tempo na representação do problema e muito tempo a aplicar uma estratégia. Normalmente utilizam uma estratégia heurística de meios e fins. Por outras palavras, no decorrer da resolução, o *resolvedor* faz o ponto da situação, compara o ponto em que se encontra com aquele que quer atingir e procura um caminho para unir estes dois pontos. Os *experts* têm uma melhor perceção da dificuldade da resolução do que os *novices*. Estes últimos não conseguem determinar tão bem a dificuldade da resolução e têm menos acuidade na solução, bem como menos flexibilidade entre os conhecimentos. Os *experts*, quando confrontados com problemas pouco usuais, demonstram mais flexibilidade, demoram mais tempo a representar o problema e encontrar estratégias.

Nesta mesma perspetiva que Sternberg, Carlson, Bloom e Glick (2008), defendem que alguns dos hábitos dos bons *resolvedores* de problemas começam com o importante investimento de tempo na orientação da resolução antes de iniciá-la propriamente. Estão incluídas nesta orientação a classificação do problema e a determinação das ferramentas disponíveis e potencialmente úteis à resolução do problema. Estes autores referem também a importância dos mecanismos de *coping*. Estes mecanismos de enfrentamento representam esforços cognitivos e comportamentais, tais como a inação, a busca de apoio, fumar, para lidar com situações de dano, de ameaça ou de desafio quando não está disponível uma rotina ou uma resposta automática, para lidar com as situações de frustração. Estes mecanismos favorecerão a persistência necessária à resolução de problemas.

Segundo ainda Bransford, John, Brown e Cocking (1999), os indivíduos que resolvem problemas de forma eficaz têm consciência dos seus procedimentos e, frequentemente, analisam ou autoavaliam o seu progresso e reajustam a sua estratégia à medida que encontram e ultrapassam obstáculos.

2.3.6. Resultados a reter

Segundo Lester (1993), há cinco resultados a considerar da literatura de investigação em ensino da resolução de problemas: (i) para melhorar as suas capacidades de resolução os estudantes devem resolver, de modo regular, uma grande variedade de problemas; (ii) A capacidade de resolução de problemas desenvolve-se lentamente, durante um período de tempo alargado; (iii) Os alunos beneficiem do ensino quando acreditam que o seu professor pensa que a resolução de problemas é importante; (iv) a maioria dos alunos beneficia significativamente de um ensino em resolução de problemas planeado de forma sistemática; (v) ensinar os alunos acerca da resolução de problemas, isto é, ensiná-los acerca das estratégias de resolução de problemas e fases de resolução de problemas, como por exemplo o modelo de quatro fases de resolução de problemas de Pólya, contribui pouco para melhorar a sua capacidade geral de resolução de problemas.

CAPÍTULO III

INTERVENÇÃO

Neste capítulo que está dividido em quatro secções, faz-se a descrição da avaliação diagnóstica – dificuldades de resolução de problemas detetadas antes da intervenção, analisam-se resoluções de quatro problemas propostos na intervenção – estratégias usadas, aspetos fortes e aspetos frágeis, descrevem-se três situações da sala de aula – dificuldades observadas, e por fim analisam-se as perceções dos alunos relativamente à resolução de problemas matemáticos – análise das respostas ao questionário. Na Tabela 4 listam-se sucintamente as tarefas e os objetivos propostos durante esta intervenção pedagógica supervisionada, constituída por dez blocos, cada um com uma duração de noventa minutos.

Tabela 4 – Resumo das atividades desenvolvidas durante a intervenção pedagógica supervisionada

Aula	Data	Conteúdo	Objetivos	Tarefas
1	01/02/12	Modelos matemáticos. Modelos cujos gráficos são retas.	Apresentar a unidade; Relembrar dados bivariados, reta de regressão e coeficiente de correlação; introduzir equação reduzida da reta.	Ficha 1
2	03/02/12	Progressões aritméticas.	Calcular o termo de ordem *n* de uma dada progressão aritmética de termo geral conhecido; Determinar a razão de uma progressão aritmética.	Problema *Toldos de praia* Ficha 2
3	07/02/12	Progressões aritméticas.	Determinar o termo geral de uma progressão aritmética; Calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética; Modelo de crescimento linear.	Ficha 3
4	08/02/12	Progressões geométricas. Crescimento exponencial.	Determinar o termo de ordem *n* de uma dada progressão geométrica de termo geral conhecido; Determinar a razão de uma progressão geométrica; Determinar o termo geral de uma progressão geométrica.	Ficha 4
5	10/02/12	Progressões geométricas. Crescimento exponencial.	Calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica; Modelo de crescimento exponencial; Esboçar corretamente o gráfico da função exponencial.	Ficha 5
6	14/02/12	Crescimento logarítmico.	Modelo de crescimento logarítmico; Resolver equações envolvendo logaritmos; Resolver equações envolvendo exponenciais; Esboçar corretamente o gráfico da função logarítmica.	Ficha 6
7	15/02/12	Modelo de crescimento logístico. Equação logística.	Modelo de crescimento logístico; Determinar as constantes do modelo de crescimento logístico.	Problema *Proteção dos lobos* Ficha 7
8	17/02/12	Modelo de crescimento logístico. Equação logística.	Interpretar as várias zonas do gráfico do modelo.	Ficha7 (continuação)
9	24/02/12	Revisões.	Escolha do modelo adequado.	
10	28/02/12	Teste de avaliação.		

3.1. Acompanhamento e avaliação dos alunos antes da intervenção

As aulas decorreram entre outubro de 2011 e junho de 2012. Durante este período, auxiliei os alunos na resolução de tarefas propostas pelo professor cooperante. Dentro destas, muitas constituíram problemas matemáticos desafiantes para os alunos. A resolução pelos alunos destes problemas foi objeto de observação e de registo sistemático. Segue a análise às resoluções dos alunos do problema *Depósito a prazo*, proposto pelo professor cooperante no teste de avaliação diagnóstica, submetido aos alunos no início do ano letivo.

Depósito a prazo

> Pretende-se colocar 10000 euros numa conta a prazo. Três bancos diferentes apresentam as seguintes propostas:
> A: Depósito a prazo a 2 anos com remuneração anual a um juro composto de 4%.
> B: Depósito a prazo a 2 anos com remuneração anual a um juro simples de 6%.
> C: Depósito a 18 meses com remuneração mensal a um juro composto de 3%.
> Qual das propostas é a mais vantajosa? Justifique a sua resposta.

Registam-se na Tabela 5, as dificuldades observadas, de acordo com o objetivo 3 – listar e analisar as dificuldades que os alunos revelam durante a resolução dos problemas matemáticos. A numeração, Ax, com x sendo um número natural entre um e dezasseis, não tem qualquer relação com o número de aluno da turma, pretendendo manter o seu anonimato.

Tabela 5 – Dificuldades observadas na resolução do problema *Depósito a prazo*

	Não iniciou a resolução do problema	Leitura	Escrita			Aplicação da fórmula		Interpretação
Aluno		Passou mal os dados do enunciado	Índice mal posicionado	Não substituiu o valor no índice	Não especifica a unidade	Má conversão das percentagens /períodos de capitalização	Erros de cálculo	Resultado sem aplicação a realidade
A1								
A2								
A3								
A4								
A5								
A6								
A7								
A8								
A9								
A10								
A11								
A12								
A13								
A14								
A15								
A16								

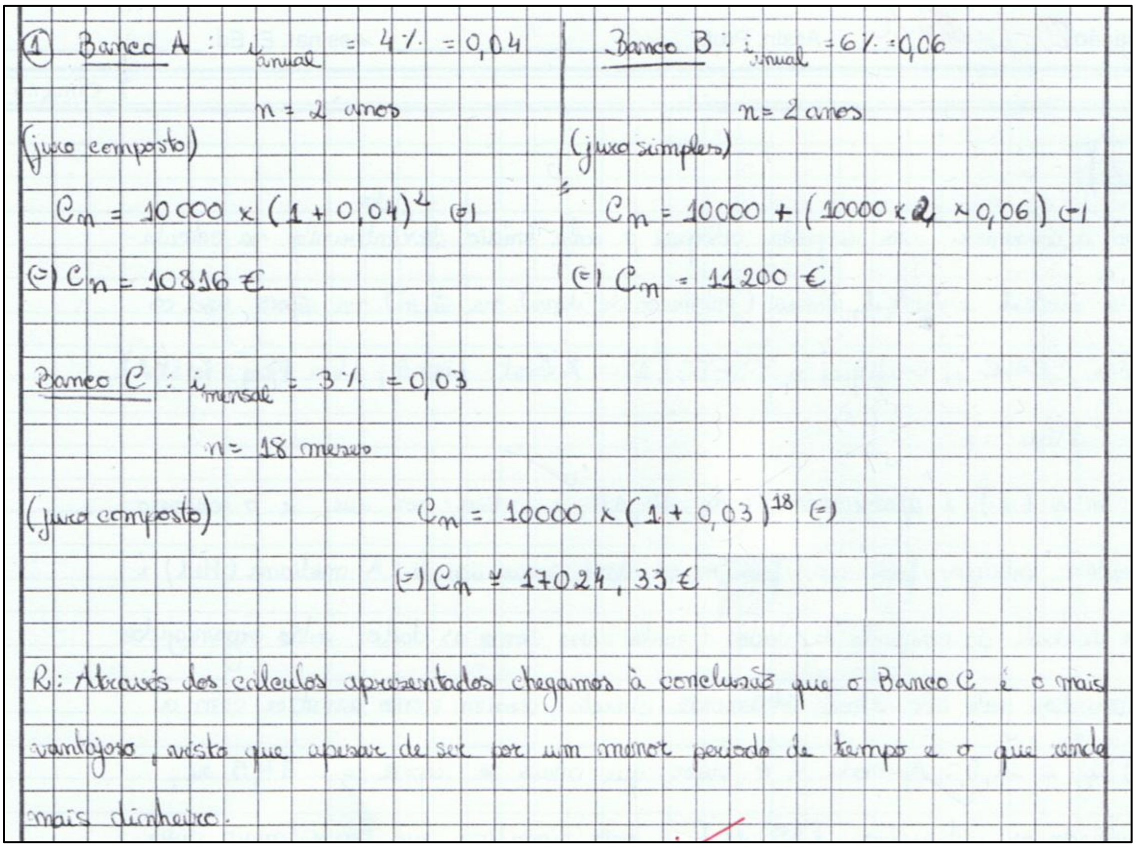
Resultante da análise de todas as resoluções deste problema, listam-se no Quadro 1, as estratégias de resolução às quais recorreram os alunos, e os seus aspetos fortes e frágeis, de acordo com os objetivos 1 – Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam quando resolvem problemas matemáticos e, 2 – Reconhecer os aspetos fortes e os aspetos frágeis das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos. Constam também no mesmo quadro as percentagens de alunos que utilizaram cada uma das estratégias.

Quadro 1 – Análise das estratégias de resolução do problema *Depósito a prazo*

Estratégia de resolução	Percentagem de utilização	Aspetos fortes	Aspetos frágeis
Divisão do problema em metas parciais	50% (8 alunos)	-Percurso de resolução parcialmente definido; -Desenvolvimento da confiança para a realização dos próximos passos.	
Modelação recorrendo a fórmula do regime de capitalização	50% (8 alunos)	-Comparação dos resultados em períodos específicos; -Generalização.	-Substituição dos fatores que intervêm na fórmula; -Conversão das percentagens e dos períodos de capitalização; -Comparação de valores em períodos de capitalização diferentes; -Cálculos algébricos.

Oito alunos iniciaram a resolução deste problema. Todos apresentaram uma resolução feita com papel e lápis, sem recurso a introdução das expressões dos modelos na calculadora gráfica. Todos os alunos recorreram a *divisão do problema* em metas parciais. Para isso começaram por determinar o valor de cada uma das três propostas no final dos períodos apresentados em cada uma delas, conforme se exemplifica na Ilustração 1, referente a resolução da aluna A2. Repara-se que nessa resolução, a aluna *justifica* que apesar do período de depósito da proposta C ser inferior aos períodos de depósito das propostas A e B, o seu capital acumulado é superior. A aluna justifica assim de modo fundamentado a melhor proposta. Posteriormente os alunos comparam esses valores e devolveram como solução o banco da proposta mais vantajosa. Outra estratégia utilizada por todos os alunos que apresentaram uma resolução, foi a representação do modelo, *recorrendo às fórmulas* de regime de capitalização simples e composto.

Foi nesta estratégia, a *modelação recorrendo à aplicação da fórmula*, que apesar de disponível no formulário, onde se observaram as maiores dificuldades.


① Banco A: $i_{anual} = 4\% = 0{,}04$ $n = 2$ anos

(juro composto)

$C_n = 10000 \times (1 + 0{,}04)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C_n = 10816$ €

Banco B: $i_{anual} = 6\% = 0{,}06$ $n = 2$ anos

(juro simples)

$C_n = 10000 + (10000 \times 2 \times 0{,}06) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C_n = 11200$ €

Banco C: $i_{mensal} = 3\% = 0{,}03$ $n = 18$ meses

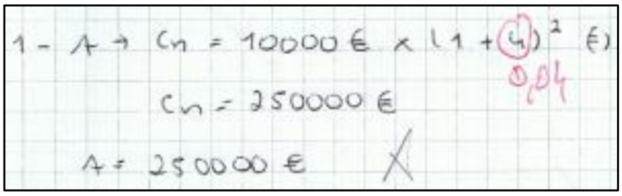
(juro composto) $C_n = 10000 \times (1 + 0{,}03)^{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C_n \approx 17024{,}33$ €

R: Através dos cálculos apresentados chegamos à conclusão que o Banco C é o mais vantajoso, visto que apesar de ser por um menor período de tempo é o que ainda mais dinheiro.

Ilustração 1 – Resolução do problema *Depósito a prazo* da aluna A2

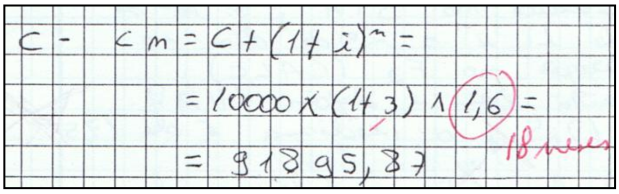
De entre elas destacam-se: a *conversão das percentagens*, como por exemplo 4% convertido em 4, em vez de 0.04, conforme se pode observar na Ilustração 2 e ainda a *conversão dos períodos de capitalização*, como por exemplo 18 meses convertidos em 1.6, conforme se pode observar na Ilustração 3. Na Ilustração 4 pode observar-se um *erro de cálculo*, referente à resolução da aluna A11, que deixa prever dificuldades relativamente às propriedades operatórias das potências. As anotações a vermelho nas ilustrações correspondem às minhas anotações durante a análise das resoluções.


1 - A → $C_n = 10000$ € $\times (1 + 4)^2 \Leftrightarrow$ 0,04

$C_n = 250000$ €

A = 250000 €

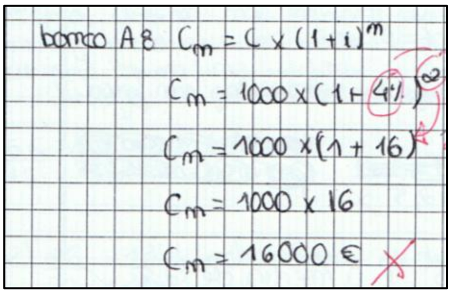
Ilustração 2 – Conversão errada da percentagem na resolução da aluna A10


C - $C_n = C + (1 + i)^n =$

$= 10000 \times (1+3) \wedge 1{,}6 =$ 18 meses

$= 91895{,}87$

Ilustração 3 – Conversão errada dos períodos de capitalização do aluno A15



banco A8 $C_m = C \times (1+i)^m$

$C_m = 1000 \times (1+4\%)^{20}$

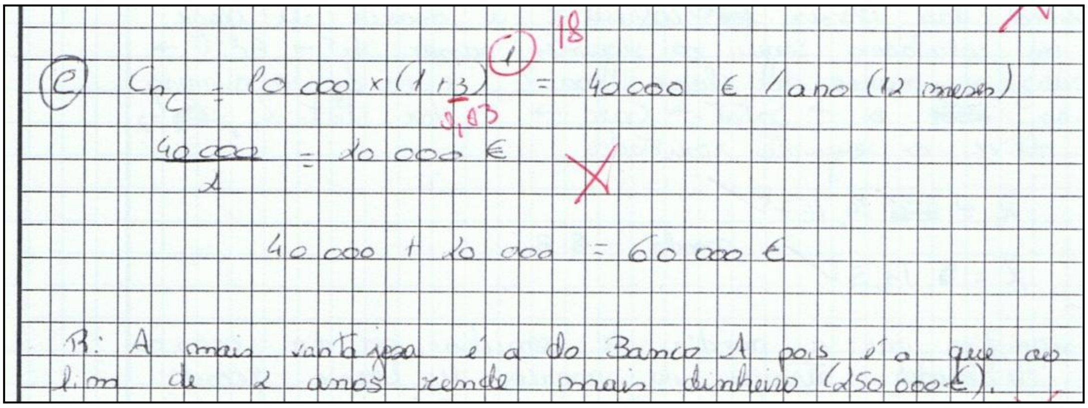
$C_m = 1000 \times (1+16)$

$C_m = 1000 \times 16$

$C_m = 16000$ €

Ilustração 4 – Erro de cálculo na resolução da aluna A11

É interessante a resolução feita pela aluna A3, reproduzida na Ilustração 5. A aluna considera o período de capitalização, dezoito meses, como sendo a soma de doze com seis meses. Assim, para determinar o capital acumulado ao fim de dezoito meses, ela *divide o problema* em dois. Ela começa por calcular o capital acumulado ao fim do primeiro ano. Como faltam ainda seis meses de capitalizações, ou seja meio ano, ela soma ao capital acumulado no primeiro ano à sua metade, de modo a completar os dezoito meses de capitalizações. Neste raciocínio está ausente a consideração da não linearidade do modelo financeiro em regime de juros compostos. Observa-se também que na consideração da melhor proposta, a aluna não comenta o facto delas serem comparadas *em períodos de depósito distintos*. Pode-se considerar que de modo implícito, a aluna compara os valores das propostas. Sendo o valor da proposta A, erradamente calculado, muito maior que os valores das propostas B e C, também erradamente calculados, a diferença de seis meses não irá alterar o facto da proposta A ser mais vantajosa. No entanto não está explicitada nenhuma justificação.



C $C_{n_C} = 10\,000 \times (1+3)^{1} = 40\,000$ € / ano (12 meses)

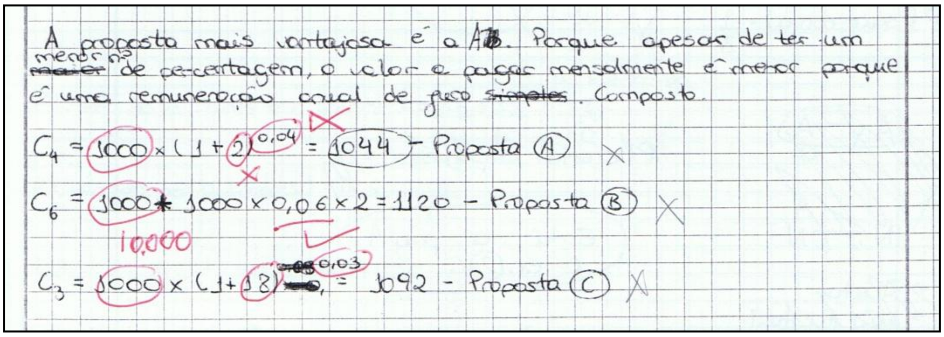
$\frac{40\,000}{2} = 20\,000$ €

$40\,000 + 20\,000 = 60\,000$ €

R: A mais vantajosa é a do Banco A pois é o que ao fim de 2 anos rende mais dinheiro (250 000 €).

Ilustração 5 – Determinação da aluna A3 do valor da proposta C

Três alunos cometeram um *erro de leitura*. Todos passaram para a sua folha de resolução, "1000" em vez de "10000" conforme se pode observar na Ilustração 6 referente à resolução da aluna A7. Não foi verificado nos problemas seguintes, mas ficou a intenção de verificar em trabalhos futuros, se este número escrito na forma "10 000" evitaria o erro.


A proposta mais vantajosa é a A. Porque apesar de ter um ~~maior~~ menor nº de percentagem, o valor a pagar mensalmente é menor porque é uma remuneração anual de juro ~~simples~~. Composto.

$C_4 = 1000 \times (1+2)^{0,04} = 1044$ - Proposta (A)

$C_6 = 1000 * 1000 \times 0,06 \times 2 = 1120$ - Proposta (B)

10000

$C_3 = 1000 \times (1+18)^{0,03} = 1092$ - Proposta (C)

Ilustração 6 – Resolução da aluna A7 do problema *Depósito a prazo*

Nota-se que a aluna converte corretamente as percentagens, no entanto troca nas fórmulas as suas posições com os períodos de capitalização. Outras dificuldades, embora sem interferência direta no resultado, foram observadas. Por exemplo *na escrita*, os alunos mostram não dominar o significado dos índices ao posicioná-los incorretamente ou ainda não os substituindo quando necessário, como comprovam as ilustrações 3, 5 e 7. Devido à má conversão das percentagens, quatro alunos apresentaram um capital acumulado irreal, por exemplo de duzentos e cinquenta mil euros quando se aplicou apenas dez mil euros em dois anos, referente à resolução da aluna A10. Nenhum dos alunos pôs em causa o resultado, *questionando a sua aplicabilidade à realidade*. Neste caso específico, poder-se-á supor que a inexperiência pessoal dos alunos ajudou a não descobrir este valor descontextualizado da realidade. No entanto, este tipo de respostas evidencia conceções de que problemas matemáticos podem não ter sentido na realidade. Segundo Schoenfeld (1991) estas visões são adquiridas nas aulas de Matemática. Os estudantes veem estes problemas como típicos, de exercício e prática. Assim é fundamental incentivar os estudantes a verificar o resultado para reforçar a sua confiança e contribuir para solidificar os seus conhecimentos. Por coincidência, um lapso na elaboração do enunciado do problema *Depósito a prazo* ilustra uma possível origem da descontextualização dos problemas à vida real. De modo a representar uma situação real, o texto da proposta C deveria ser "Depósito a 18 meses com remuneração mensal a um juro composto *anual* de 3%", o que arredondado devolveria 10459€ em vez dos 17024€, que infelizmente nenhuma instituição financeira iria propor.

Do acompanhamento dos alunos na resolução de problemas matemáticos durante as aulas e, da análise das suas resoluções de problemas nos testes de avaliação sumativa, construiu-se uma classificação relativa às suas resoluções dos problemas. Esta classificação descrita no Quadro 2, baseou-se nos critérios e nos descritores organizados na Tabela 6.

Tabela 6 – Possíveis critérios e descritores para a avaliação na resolução de problemas

Critérios	Indicadores	Descritores		
		Nível 1	Nível 2	Nível 3
Apropriação (relativo à compreensão da situação)	Seleção pertinente de dados	Não seleciona os dados necessários para a resolução do problema	Seleciona parte dos dados necessários para a resolução do problema	Seleciona todos os dados necessários para a resolução do problema
Eficiência (relativo ao processo-estratégia)	Seleção da estratégia	Não apresenta estratégia ou usa estratégia inadequada	Apresenta estratégia adequada	Apresenta estratégia adequada e poderosa
	Execução da estratégia	Comete erros na execução e não conclui	Comete erros na execução ou não conclui	Não comete erros na execução e conclui
Eficácia (relativo ao produto-solução)	Correção e completude da solução	Apresenta solução incorreta ou não apresenta solução	Apresenta solução parcialmente correta ou incompleta; ou solução coerente com a estratégia desenvolvida	Apresenta solução correta e total

Esta classificação teve três objetivos: Verificar se a escolha dos problemas era adequada. Problemas com grau de dificuldade elevado desmotivam os alunos. Por outro lado, problemas muito fáceis, não constituem um desafio, o que acaba por desinteressar os alunos. A seleção dos problemas constituiu uma dificuldade, aumentada pelo facto dos alunos dentro da

Quadro 2 – Classificação relativa às resoluções dos problemas

Aluno	**Iniciante – Nível 1**	**Moderado – Nível 2**	**Experiente – Nível 3**
A1			
A2			
A3			
A4			
A5			
A6			
A7			
A8			
A9			
A10			
A11			
A12			
A13			
A14			
A15			
A16			

mesma turma apresentarem diferentes níveis de destrezas na resolução de problemas; Comprovar, de acordo com a literatura consultada, as características que diferenciam os *resolvedores* de problemas mais experientes daqueles que o são menos; Construir um referencial para verificar a compreensão dos alunos relativamente às resoluções de problema apresentadas. O facto de alunos iniciantes e experientes perceberem a explicação de uma possível resolução ou, de um conteúdo referente à unidade temática na qual incidiu a intervenção, constituía um indicador que me permitia avançar para outra tarefa.

3.2. Problemas propostos e análise das resoluções

Neste subcapítulo analisam-se as resoluções de quatro problemas selecionados entre aqueles propostos aos alunos durante a intervenção. Inicia-se a análise por uma breve descrição do problema e do momento em que foi colocado aos alunos. De seguida, organizam-se resumidamente num quadro as estratégias de resolução utilizadas e, os aspetos fortes e os aspetos frágeis detetados, de acordo com os objetivos 1 – Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam quando resolvem problemas matemáticos e, 2 – Reconhecer os aspetos fortes e os aspetos frágeis das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos. No mesmo quadro identificam-se estratégias as quais os alunos possivelmente iriam recorrer, consideradas na fase de elaboração do plano da aula. Constam também no quadro as percentagens de alunos que utilizaram cada uma das estratégias. Por fim referem-se as resoluções mais representativas e as dificuldades observadas, de acordo com o objetivo 3 – Listar e analisar as dificuldades que os alunos revelam durante a resolução dos problemas matemáticos.

3.2.1. Problema *Toldos de praia*

O problema *Toldos de praia* foi proposto na segunda aula da intervenção pedagógica supervisionada. Foi dado a cada aluno uma folha com o enunciado, retirado e adaptado da *internet*, e espaço suficiente para a resolução do problema, conforme se pode verificar no Anexo 1. Para a resolução desta tarefa, os alunos dispuseram de quinze minutos, tempo após o qual as resoluções foram recolhidas. Reproduz-se o enunciado do problema.

> Numa praia, um banheiro tem de colocar 20 toldos em fila. O armazém está a dez metros do local onde o primeiro toldo tem de ser colocado. Imagine que ele só transporta um toldo de cada vez e que os toldos estão distânciados entre si cinco metros. Quantos metros percorrerá o banheiro para colocar todos os toldos?

Este problema foi proposto antes de abordar o tema das progressões aritméticas, pelo que os alunos não dispunham *a priori* de informações suficientes para recorrer à equação deste modelo nem à fórmula da soma dos seus n primeiros termos. Segue no Quadro 3 a síntese da análise das resoluções deste problema.

Quadro 3 – Análise das estratégias de resolução do problema *Toldos de praia*

Estratégia de resolução	Percentagem de utilização	Aspetos fortes	Aspetos frágeis
Modelação recorrendo à um diagrama	31% (5 alunos)	-Facilita a determinação das distâncias a percorrer; -Representação do problema.	
Modelação recorrendo a equação do modelo (determinação e aplicação)	0%	-Desenvolvimento do raciocínio dedutivo; -Generalização para situações com n toldos.	
Divisão do problema em metas parciais	88% (14 alunos)	-Compreensão da estrutura do problema; -Simplificação.	
Criação de uma lista (sem com recurso a calculadora ou ao computador)	63% 25% (10 4 alunos)	-Consideração do caso específico da colocação do último toldo;	
Generalização (percurso ida/volta e distâncias percorridas)	81% (13 alunos)	-Determinação das distâncias percorridas.	-Não consideração do caso específico da colocação do último toldo.

Seguem-se as análises de oito resoluções, selecionadas entre as dezasseis entregues pelos alunos, que se consideram mais representativas.

Resolução da aluna A11

A aluna A11 não apresentou uma resolução do problema. A aluna registou os dados do enunciado que considerou relevantes e esboçou um desenho que acabou por apagar.

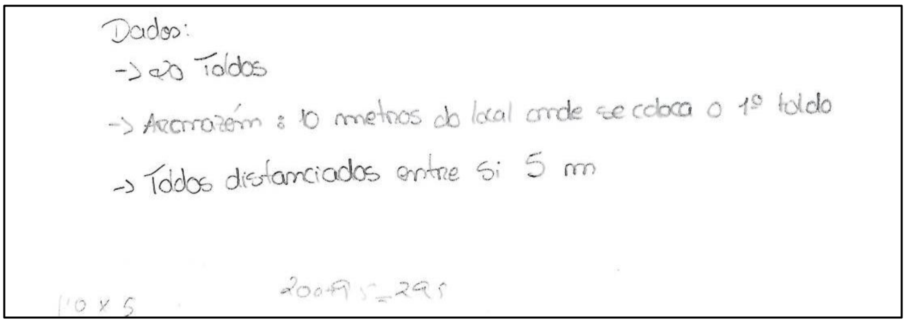


Ilustração 7 – Resolução da aluna A11 do problema Toldos de praia

Na Ilustração 7 aqui reproduzida, as marcas do esboço que ela fez não são visíveis, no entanto é muito semelhante ao desenho feito pela sua colega A16. É relevante destacar o facto da aluna *identificar os dados* fornecidos pelo enunciado sem no entanto apresentar a relação entre eles.

Resolução da aluna A16

A aluna também não apresentou um resultado final como solução do problema. Ela fez o desenho que se digitalizou. Ela representou o armazém e vinte traços, um para representar cada toldo. Nota-se que o armazém e os toldos não estão alinhados, o que pode indiciar uma dificuldade a nível da *compreensão do enunciado*.

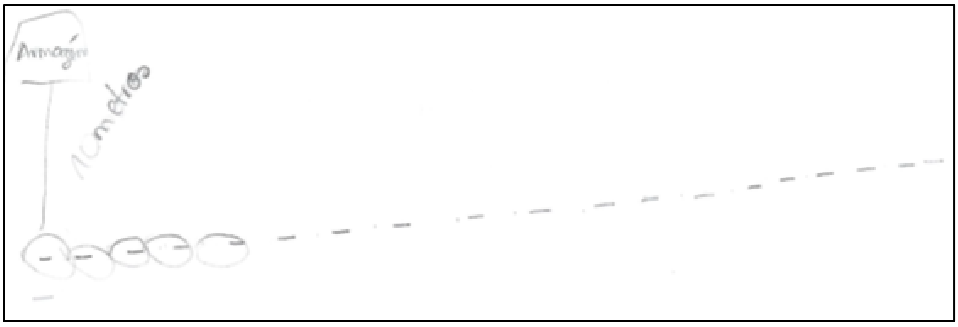


Ilustração 8 – Resolução da aluna A16 do problema *Toldos de praia*

Resolução da aluna A14

A aluna A14 não esboçou nenhum desenho para representar a situação problemática. A aluna considerou cada uma das distâncias percorridas pelo banheiro e somou-as. Nota-se a explicação por cima dos primeiros quatro números em que duas distâncias correspondem ao momento em que o banhista "vai" e as outras duas distâncias correspondem ao momento em que o banhista "volta".

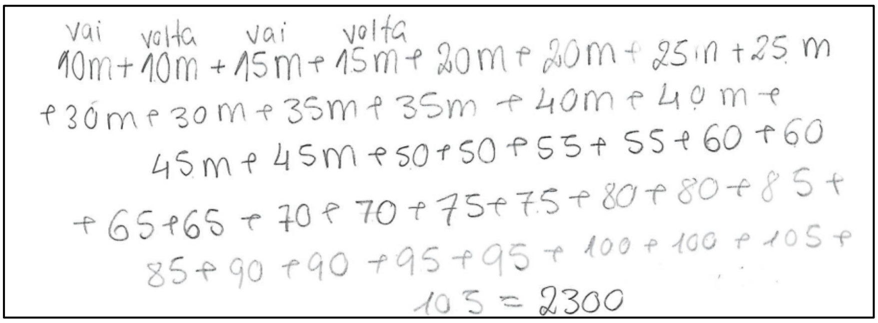

vai volta vai volta
10m + 10m + 15m + 15m + 20m + 20m + 25m + 25 m
+ 30m + 30 m + 35m + 35m + 40m + 40 m +
45m + 45m + 50 + 50 + 55 + 55 + 60 + 60
+ 65 + 65 + 70 + 70 + 75 + 75 + 80 + 80 + 85 +
85 + 90 + 90 + 95 + 95 + 100 + 100 + 105 +
105 = 2300

Ilustração 9 – Resolução da aluna A14 do problema *Toldos de praia*

Resolução da aluna A5

A aluna A5 fez um desenho representativo da situação. Nota-se a *notação* "A" para representar o armazém, faltando no entanto o uso de notação adequada para representar cada toldo. A aluna faz a soma de todas as distâncias percorridas pelo banheiro. Ela lista as distâncias percorridas, de ida e volta, entre o armazém e o toldo n como sendo a soma da distância do armazém ao primeiro toldo com o número cinco, somado n-1 vezes. No entanto ela não faz a lista de todas as distâncias. Em certo momento ela escreve reticências entre parênteses sem explicar quantas parcelas mais irá somar. Quando questionada sobre como determina a última distância que somou, a aluna *justifica ter generalizado* a distância que separa o armazém do toldo n como sendo a soma da distância do armazém ao primeiro toldo com o produto de cinco por o número do toldo menos um. Como na resolução da aluna A14, a aluna A5 não escreve uma frase para salientar a resposta nem escreve a unidade de medida.

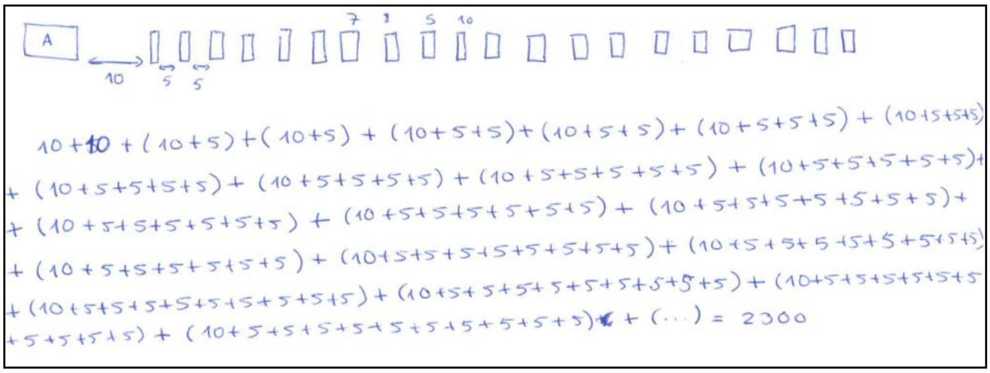


Ilustração 10 – Resolução da aluna A5 do problema *Toldos de praia*

Resolução da aluna A7

A aluna A7 desenhou vinte quadrados para representar os vinte toldos alinhados com um outro quadrado que representa o armazém. Este alinhamento, idêntico àquele existente no desenho da aluna A5, é representativo do facto das distâncias aumentarem. Esta implicação não está presente nas duas primeiras resoluções, das alunas A11 e A16. Ambas as alunas, A5 e A7, representaram as distâncias nos desenhos, mas com a diferença de que a primeira não escreveu a unidade de medida. Apesar desta diferença, nenhuma apresentou o *resultado com a unidade*.

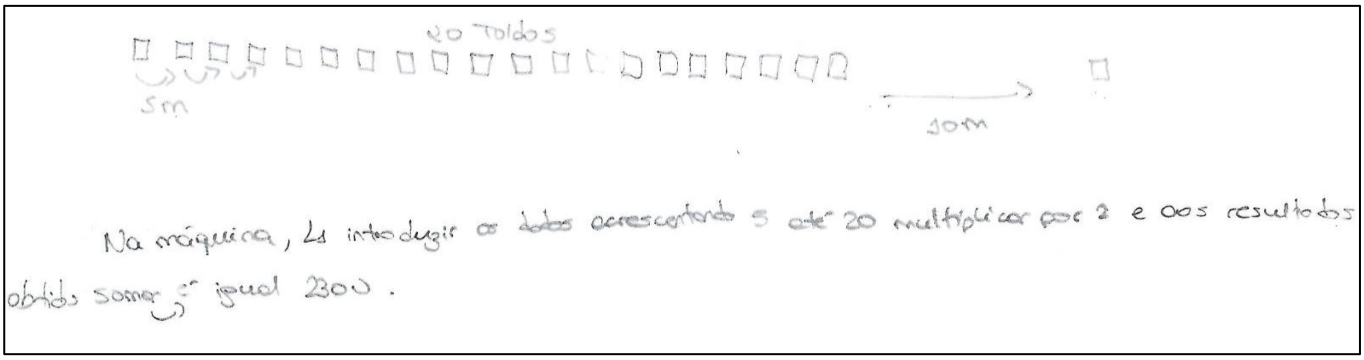


Ilustração 11 – Resolução da aluna A7 do problema *Toldos de praia*

A aluna A7 obteve o resultado utilizando os comandos da *calculadora gráfica*, que teve o cuidado de especificar. Nota-se que a aluna obteve a última distância percorrida pelo banheiro através de *somas sucessivas*, sem recorrer à nenhuma generalização.

Resolução da aluna A10

A aluna desenhou um quadrado alinhado com vinte pontos. Ela representou as vinte distâncias dos vinte percursos que o banheiro fará para colocar todos os toldos. Repara-se que a aluna representou com arcos as distâncias percorridas e representou a distância que separa o armazém do vigésimo toldo, "105". A aluna apresentou o resultado como sendo o somatório das distâncias que aumentam de cinco metros sucessivamente até a última distância percorrida, cento e cinco metros. Está implícito, como se confirmou *a posteriori* em conversa com a aluna, a intenção de *realizar na calculadora* o somatório dos vinte primeiros termos da progressão aritmética de razão cinco e primeiro termo dez. Para isso a aluna *dividiu o problema* em duas partes. Encontrou qual a distância que separa o armazém do vigésimo toldo e depois realizou a soma dos vinte termos. A aluna justifica a repetição dos termos escrevendo por cima "vai" e "volta". Ela escreve a unidade de medida no resultado.

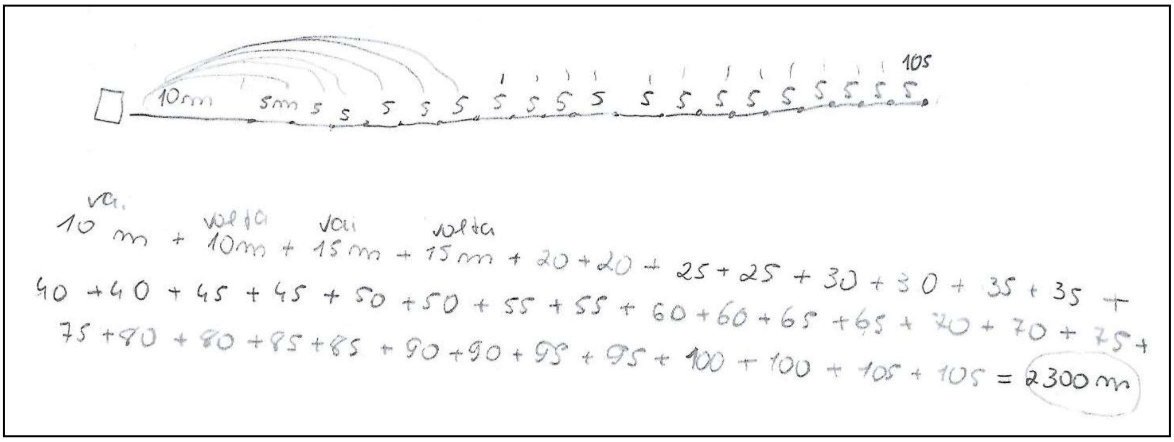


Ilustração 12 – Resolução da aluna A10 do problema *Toldos de praia*

Resolução do aluno A13

Para a resolução deste problema o aluno A13 utiliza os comandos estatísticos da calculadora gráfica. Nota-se que ele foi o único aluno a utilizar uma notação para o armazém e cada um dos toldos. Usa a letra "A" para representar o armazém e os índices na letra "T", T_1,T_2, ..., T_{20} para representar os vinte toldos. O aluno apresenta o resultado com a unidade de medida.

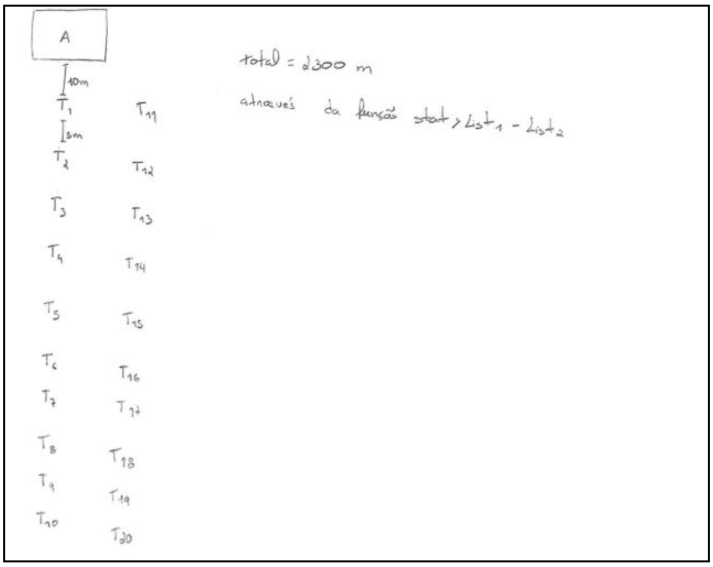


Ilustração 13 – Resolução do aluno A13 do problema *Toldos de praia*

Resolução da aluna A6

A resolução da aluna é entregue numa folha Excel, em formato digital devido a motivos relacionados com o seu estado de saúde. Na sua resolução, a aluna faz *uma lista* de todos os percursos realizados, armazém – primeiro toldo, toldo – armazém e assim sequencialmente até ao vigésimo toldo. Ela faz o somatório e apresenta corretamente como resultado 2195 metros, o que difere dos 2300 metros apresentados pelos seus colegas. Questionada, a aluna responde que, após colocar o vigésimo toldo o banheiro não volta ao armazém. A aluna A6 foi a única aluna a apresentar este resultado. Poder-se-á pensar que a criação de uma lista estruturada, com ajuda de um computador, constituiu para a aluna um método que lhe devolveu uma perceção mais real do problema.

armazém- primeiro tolde	10	armazém-11 tolde	60
1º tolde-armazém	10	11 tolde-armazém	60
armazém-2º tolde	15	armazém 12 tolde	65
2º tolde-armazém	15	12 tolde - armazém	65
armazém-3º tolde	20	armazém 13 tolde	70
3º tolde-armazém	20	13 tolde - armazém	70
armazém-4º tolde	25	armaze´m 14 tolde	75
4º tolde-armazém	25	14 tolde- armazém	75
armazém-5º tolde	30	armazém-15	80
5º tolde-armazém	30	15-armazém	80
armazém-6º tolde	35	armazém 16	85
6º tolde-armazém	35	16-armazém	85
armazém-7º tolde	40	armazém - 17	90
7º tolde-armazém	40	17 - armazém	90
armazém-8º tolde	45	armazém- 18	95
8º tolde-armazém	45	18-armazém	95
armazém-9º tolde	50	armazém-19	100
9º tolde-armazém	50	19 - armazém	100
armazém-10 tolde	55	armazém -20	105
10 tolde-armazém	55	totais	2195

Ilustração 14 – Resolução da aluna A6 do problema *Toldos de praia*

Considerações

Existem neste problema pelo menos dois resultados que podem ser generalizados. O primeiro resultado, relativo a duplicação das distâncias percorridas, resultante do percurso de ida e de volta, foi generalizado pela maioria dos alunos (88%). Esta *generalização* levou a não considerar o caso da colocação do último toldo, em que o banheiro não necessita voltar ao armazém. Já a segunda generalização, referente à distância percorrida em função do toldo n, não foi feita, pelo menos de modo explícito. A resolução da aluna A5 é por isso interessante no sentido de revelar, após a aluna ser questionada, que ela generaliza o resultado que separa o toldo n do armazém sem no entanto deixar indícios claros desse raciocínio na sua folha de resolução. Este facto ilustra uma dificuldade sentida nas análises feitas durante a investigação às resoluções de problemas feitas pelos alunos.

A calculadora gráfica revelou-se para os alunos um meio de auxílio na resolução deste problema. Devido à relativa pequena quantidade de toldos a serem colocados, a distância que separa o armazém do último toldo pode ser obtida fazendo a soma das distâncias do armazém até ao primeiro toldo e somar seguidamente dezanove vezes o número cinco. O recurso a este processo, o *uso mecânico da calculadora*, revela-se desfavorável à determinação da expressão que generaliza a distância que separa o armazém do toldo n.

Relativamente à *representação do problema* recorrendo a um diagrama, verifica-se uma baixa percentagem de alunos, com apenas 38% dos alunos a recorrer à esta estratégia.

3.2.2. Problema *Venda de eletrodomésticos*

Este problema faz parte das tarefas da terceira ficha, entregue aos alunos na terceira aula da unidade modelos populacionais. O problema foi criado tendo por base diferentes tarefas consultadas no manual adotado pela escola. Reproduz-se o enunciado.

> Numa loja de eletrodomésticos venderam-se, no mês de janeiro de 2011, sete máquinas de lavar. Supondo que o fator de crescimento mensal das vendas é constante e igual a três:
> a) Escreve uma expressão que modela a situação.
> b) Quantas máquinas de lavar foram vendidas no primeiro semestre desse ano?
> c) Ao fim de quantos meses a loja vendeu 242 máquinas?

Na realização das tarefas das fichas, os alunos estão divididos em seis grupos cuja constituição varia de dois a três elementos, conforme se pode observar no Quadro 4.

Quadro 4 – Constituição dos grupos na realização das tarefas das fichas

Grupo	Elementos	Grupo	Elementos
G1	A11, A15, A16	G4	A1, A4, A8
G2	A3, A9	G5	A2, A5, A6
G3	A10, A14	G6	A7, A12, A13

Segue no Quadro 5 a síntese da análise das resoluções deste problema.

Quadro 5 – Análise das estratégias de resolução do problema *Venda de eletrodomésticos*

Alínea	Estratégia de resolução	Percentagem de utilização	Aspetos fortes	Aspetos frágeis
a)	Generalização a partir da razão	33% (2 grupos)	-Exercitar a conjetura de resultados; -Reforçar a importância de verificar o resultado.	-Determinação do fator que multiplica a razão.
a)	Modelação com recurso à expressão do modelo	67% (4 grupos)	-Relacionar os índices dos termos com o fator que multiplica a razão.	-Substituição dos índices;
b)	Criação de uma lista	83% (5 grupos)	-Direto, sem recurso a memorização; -Visualização da evolução das vendas.	-Trabalhoso para somas de muitos termos.
b)	Recurso à fórmula da soma	17% (1 grupo)	-Substituição dos índices; -Adequado para a soma de muitos termos; -Criação de metas parciais.	
c)	Criação de uma lista	100% (6 grupos)	-Direto, sem recurso a memorização; -Não necessita a aplicação de fórmulas.	-Trabalhoso para somas de muitos termos.
c)	Tentativa – erro	0%	-Organização dos dados; -Definição dos intervalos possíveis de solução.	

Os seis grupos apresentaram uma resolução para este problema. Na alínea a, foram utilizadas duas estratégias. Uma realizada por dois grupos, consistiu em *organizar os dados* fazendo a correspondência dos eletrodomésticos vendidos com o respetivo mês, conforme se pode observar na Ilustração 15, resolução do aluno A8. Para janeiro 2011, “7” máquinas, para fevereiro de 2011, “7+3” máquinas, para março de 2011, “7+3+3” máquinas, e assim sucessivamente. De seguida relacionaram o número de vezes que somaram o número três com o número sete e *generalizaram* o resultado, obtendo a expressão do modelo. Um ponto positivo que se observou nestes dois grupos, foi que *verificaram* a expressão obtida, testando a quantidade de eletrodomésticos vendidos em alguns meses e compararam com os resultados calculados manualmente. Os restantes quatro grupos recorreram à equação do modelo. No recurso à esta estratégia, continua a observar-se dificuldades ao nível da escrita, na substituição dos índices.

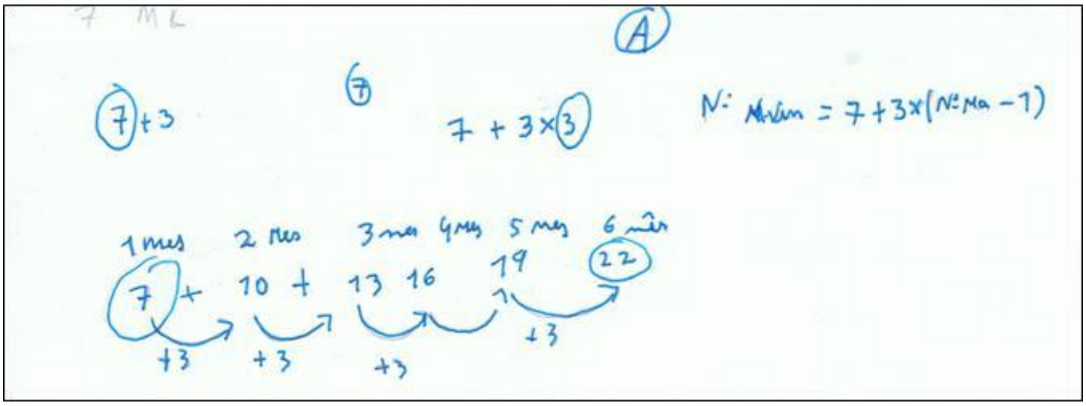


Ilustração 15 – Resolução do aluno A8 do problema *Venda de eletrodomésticos*

Na alínea b, um grupo recorreu à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, conforme se observa na Ilustração 16, resolução da aluna A4. Para poder aplicar a fórmula, a aluna determina nos cálculos auxiliares, o termo de ordem seis. Este cálculo corresponde a realização de uma *meta parcial* criada implicitamente pela aluna. Nota-se que a aluna substitui corretamente os valores nos índices.

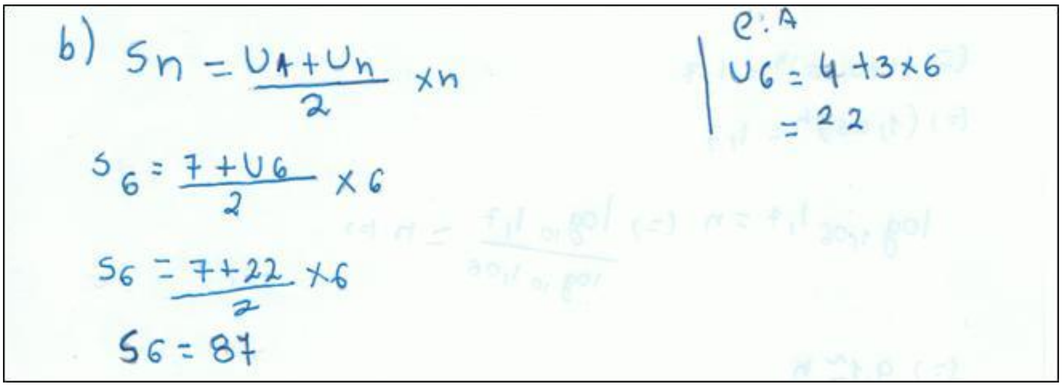
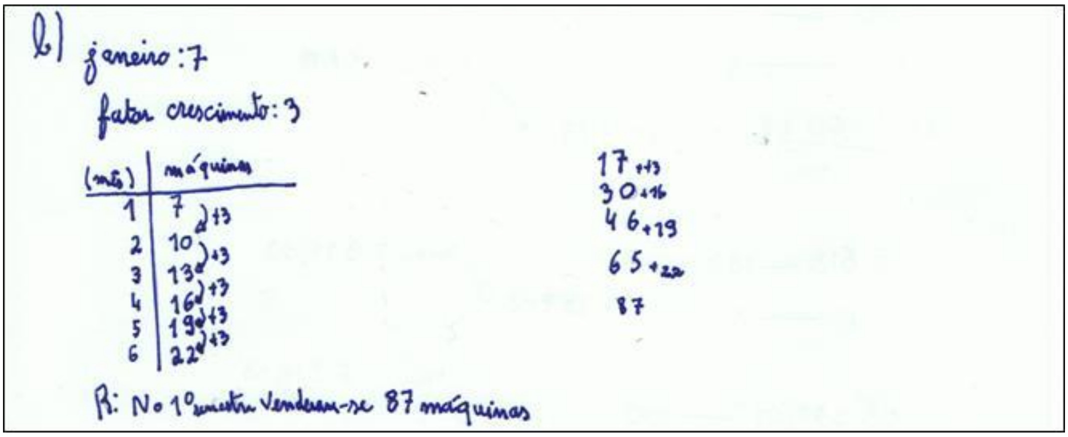


Ilustração 16 – Resolução da aluna A4 do problema *Venda de eletrodomésticos*

Os restantes grupos listaram as quantidades de máquinas vendidas nos seis primeiros meses e somaram-nas, como exemplificado na resolução da aluna A9, na Ilustração 17.



b) janeiro: 7
fator crescimento: 3

(mês)	máquinas
1	7
2	10
3	13
4	16
5	19
6	22

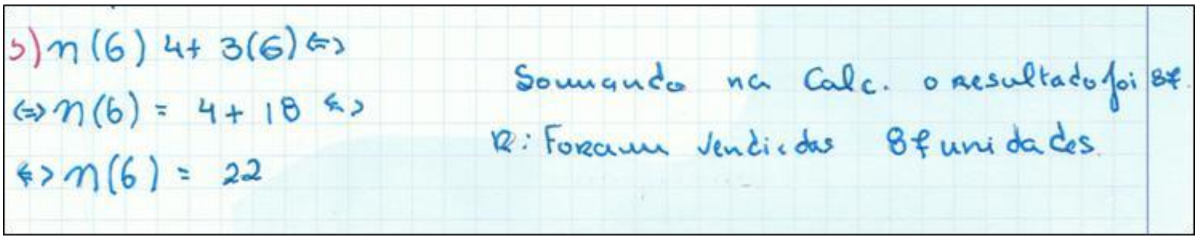
17 +13
30 +16
46 +19
65 +22
87

R: No 1º semestre venderam-se 87 máquinas

Ilustração 17 – Resolução da aluna A9 do problema *Venda de eletrodomésticos*

A *criação de uma lista* revela-se uma estratégia vantajosa para que os alunos possam visualizar a linearidade do modelo. Para qualquer número natural n, o resultado da linha 1+n obtém-se somando ao resultado da linha 1, o produto de n por 3. No entanto ela revela-se pouco eficiente para casos em que a soma envolve uma grande quantidade de termos, sendo preferível recorrer à fórmula da soma.

Um grupo deu como resposta a quantidade de eletrodomésticos vendidos no sexto mês, conforme se pode verificar na Ilustração 18, resolução da aluna A1. Um outro grupo também revelou dificuldades de *compreensão do enunciado* ao solicitar esclarecimentos relativamente ao que devia fazer nesta alínea.



b) $n(6)\ 4+3(6) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(6) = 4+18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(6) = 22$

Somando na Calc. o resultado foi 87.
R: Foram vendidas 87 unidades.

Ilustração 18 – Resolução da aluna A1 do problema *Venda de eletrodomésticos*

Na resolução da alínea c, planeava-se que os alunos iriam recorrer às expressões do termo de ordem n e a expressão da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Exemplificando, após calcular o termo de ordem oito, os alunos calculariam a soma dos oito primeiros meses. Verificando que o resultado era inferior à quantidade pretendida de eletrodomésticos vendidos, calculariam um termo de ordem mais elevada, por exemplo quinze e calculariam a respetiva quantidade total de eletrodomésticos vendidos. Neste caso, estando esta quantidade muito além do pretendido, os alunos iriam diminuir o intervalo de soluções possíveis até obterem a solução, o número onze. No entanto, para o caso concreto deste problema, todos os grupos recorreram a uma listagem das quantidades de eletrodomésticos vendidos em meses sucessivos, somando-as até obter o total pretendido, como se pode observar na Ilustração 19 referente à resolução do aluno A15. Nessa ilustração, constam duas resoluções. Na que se encontra à esquerda do traço vertical, o aluno responde à pergunta “em que mês se venderá duzentas e quarenta e duas máquinas?”. Levado a perceber este facto, o aluno iniciou a segunda resolução, à direita do traço vertical. Um outro grupo cometeu o mesmo erro, mas *suspeitou do resultado*, um número não inteiro, o que levou a questionar se estava correto. O erro de interpretação inicial permitiu estimular o *sentido crítico* destes alunos relativamente ao resultado obtido.

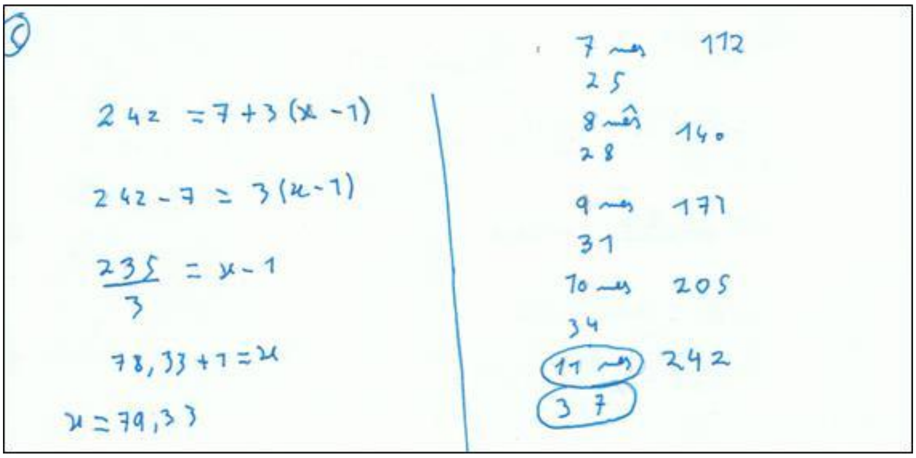


Ilustração 19 – Resolução do aluno A15 do problema *Venda de eletrodomésticos*

Considerações

Para a resolução da alínea c deste problema, tinha considerado que os alunos, muito provavelmente iriam recorrer à estratégia de tentativa-erro. Esta estratégia acabou por não ser utilizada por nenhum aluno. A imprevisibilidade e a diversidade das resoluções dos alunos são aspetos que embora enriquecem as análises, podem ser motivo de contrariedades, nomeadamente na obtenção de resultados esperados. Uma boa preparação das tarefas, de modo a atingir objetivos pré-estabelecidos é fundamental. Outra dificuldade reside na compreensão dos raciocínios, por vezes complexos, que os alunos expressam numa linguagem matemática nem sempre correta. Revela-se necessário abstrair ou desconstruir um raciocínio interiorizado para perceber um raciocínio dos alunos.

Observou-se de um modo intuitivo, uma preferência dos alunos para elaborarem algoritmos trabalhosos, mas que inspiram uma maior segurança relativamente ao percurso de resolução. Observou-se esta preferência em alternativa de tentar adquirir novos conhecimentos relativos à estratégias alternativas de resolução, mesmo sendo estas menos trabalhosas na sua aplicação. Este facto pode justificar em certa medida, o período de tempo alargado que Lester (1993) afirma ser necessário para desenvolver as capacidades de resolução de problemas.

3.2.3. Problema *Juros compostos*

Este problema resulta de uma adaptação de um problema retirado do manual de MACS do 10.º ano da Porto Editora. Ele foi proposto aos alunos na sexta aula da intervenção. Nesta aula foram introduzidas as noções de logaritmo assim como algumas das suas propriedades de cálculo. Reproduz-se o enunciado.

> Uma pessoa aplicou 5000€ numa conta poupança de uma instituição bancária que paga juros anuais de 6%, no regime de juros compostos. Determina quanto tempo é necessário para que o saldo dessa conta ultrapasse os 8500€ ?

No Quadro 6 encontra-se a síntese da análise das resoluções deste problema.

Quadro 6 – Análise das estratégias de resolução do problema *Juros compostos*

Estratégia de resolução	Percentagem de utilização	Aspetos fortes	Aspetos frágeis
Listagem dos juros e capitais acumulados em cada ano.	33% (2 grupos)	-Perceção da não linearidade do modelo.	-Trabalhoso e susceptível a erros; -Impraticável para muitos períodos de capitalização; -Erros de arredondamento.
Modelação recorrendo à expressão (determinação e aplicação)	67% (4 grupos)	-Relação do índice do termo de ordem n, com o fator que multiplica a razão; -Generalização.	
Recurso às propriedades dos logaritmos	67% (4 grupos)	-Familiarização com o cálculo de logaritmos;	
Recurso a uma tabela	33% (2 grupos)	-Definição dos parâmetros da tabela; -Leitura da tabela.	

Este problema foi resolvido de dois modos. Um primeiro grupo de alunos *criou um algoritmo* recorrendo à "regra de três simples". Igualaram o capital inicial e o *x*, a cem e a seis por cento respetivamente. Determinaram assim o juro e o capital acumulado no final do primeiro ano. Este capital passou a ser o capital inicial no ano seguinte e iteraram o processo registando o capital acumulado no final de cada ano. Os alunos precisaram de uma folha A4 inteira para escrever a resolução deste problema. Reproduz-se na Ilustração 20 o início e o fim da resolução da aluna A9.

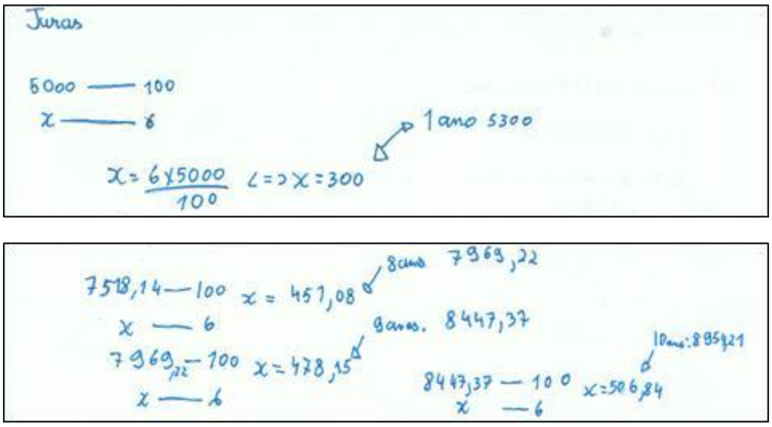


Ilustração 20 – Resolução da aluna A9 do problema *Juros compostos*

Quando discutido com os alunos relativamente às desvantagens desta estratégia, foi consensual a *impraticabilidade* do algoritmo em tempo real, recorrendo apenas a lápis, folha e calculadora, para casos em que os períodos de capitalização fossem numerosos. Outra desvantagem é relativa à *falta de precisão*, que se agrava, devido aos arredondamentos, quando o número de iterações aumenta. Aponta-se como vantagem a perceção do aumento do valor dos juros de ano para ano, reforçando o aspeto não linear deste modelo. Os alunos recorreram à expressão do modelo como outra estratégia de resolução. Na resolução da equação obtida, verificaram-se duas estratégias. Uma foi baseada no recurso às propriedades dos logaritmos e outra recorrendo à elaboração de uma tabela. Na primeira estratégia, observou-se o cálculo direto do logaritmo, introduzindo na calculadora gráfica a base 1.06, conforme sugere a Ilustração 21, relativa à resolução da aluna A10.

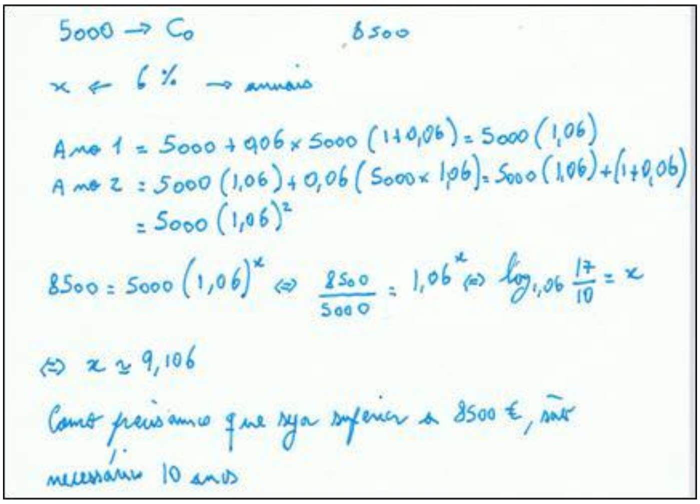


Ilustração 21 – Resolução da aluna A10 do problema *Juros compostos*

É interessante verificar que a aluna não memorizou a fórmula do capital acumulado em regime de juros compostos. A aluna constrói a fórmula. Para isso ela generaliza a expressão a partir de dois casos particulares, os capitais no final dos dois primeiros anos. De seguida a aluna resolve algebricamente o problema com recurso às propriedades dos logaritmos e à calculadora gráfica. Responde corretamente, dez anos, obtidos pelo arredondamento ao número inteiro imediatamente superior ao valor obtido no cálculo do logaritmo.

Na resolução da equação também se observou o recurso à mudança de base do logaritmo, conforme se pode observar na Ilustração 22, resolução da aluna A4.

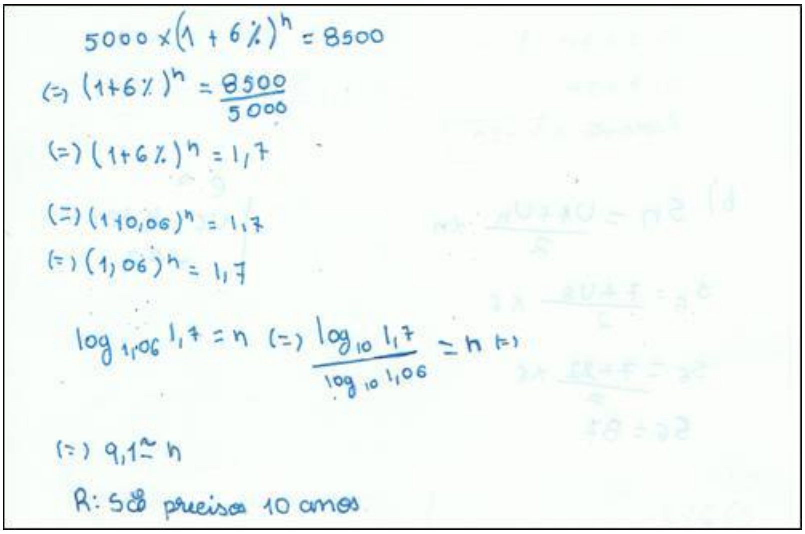


Ilustração 22 – Resolução da aluna A4 com recurso às propriedades dos logaritmos

Na resolução da equação recorrendo a uma tabela, os alunos introduziram na calculadora a expressão do modelo e verificaram para que valor de n a condição era satisfeita. Nota-se na Ilustração 23 referente à resolução da aluna A1, a expressão está colocada na forma de uma inequação. Quando questionada sobre como usou a tabela, a aluna justifica que foi através da leitura da mesma, apontando a linha em que a expressão é igual a 1.7908, primeiro valor imediatamente superior a 1.7 e, na qual x é igual a 10.

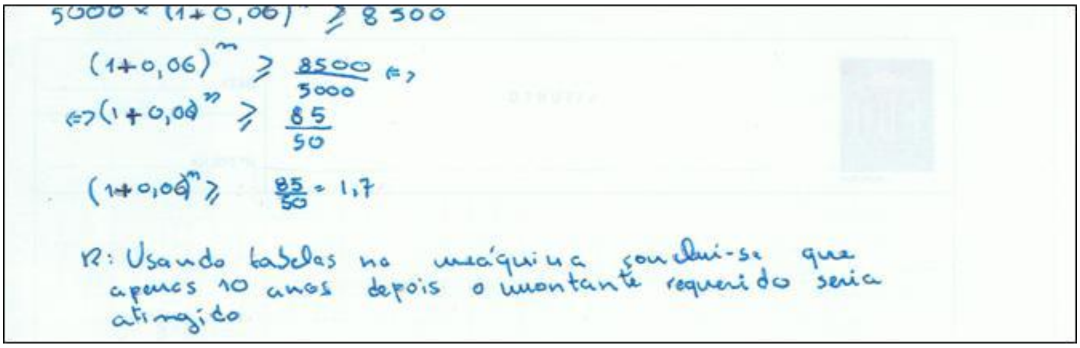


Ilustração 23 – Resolução da aluna A1 do problema *Juros compostos*

3.2.4. Problema *Proteção dos lobos*

Na sétima aula foi solicitado aos alunos para entregarem as suas resoluções do problema *Proteção dos lobos,* cuja folha de enunciado se encontra no Anexo 2. O enunciado foi elaborado tendo por base diferentes problemas. Esta tarefa foi realizada nos mesmos moldes que o problema *Toldos de praia.* Os alunos receberam uma folha com o enunciado e espaço suficiente para escreverem as suas resoluções. Dispuseram de 15 minutos, tempo após o qual as suas resoluções foram recolhidas. Reproduz-se o enunciado.

1) No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural.
As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. No entanto, as limitações dos recursos do parque permitem prever que o número de lobos tende a estabilizar em determinado valor.
A expressão que dá o número aproximado, N, de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972, é dada por:

$$N(t) = \frac{1000}{1+1{,}5\times e^{-0{,}5t}}$$

a) De acordo com este modelo, qual será a população de lobos no final de 1976?
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.
b) Recorrendo às capacidades da tua calculadora, resolve a seguinte questão:
De acordo com este modelo, em que ano o número de lobos foi de, aproximadamente, 750?
Descreve os comandos utilizados.
c) Indica o número para o qual a população tende a estabilizar. Justifica a tua resposta.

Nenhum dos dezasseis alunos respondeu à alínea c e três alunos iniciaram a resolução da alínea b. Resume-se no Quadro 7 a análise das resoluções dos alunos.

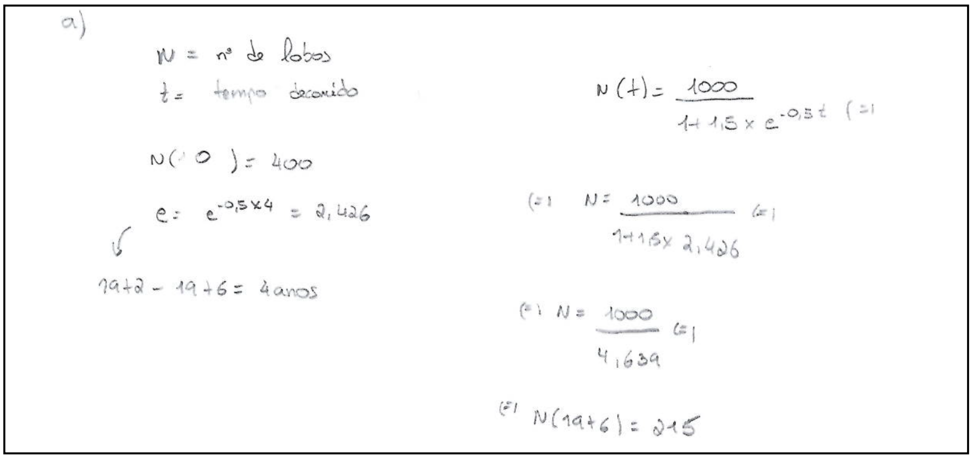
Quadro 7 – Análise das estratégias de resolução do problema *Proteção dos lobos*

Alínea	Estratégia de resolução	Percentagem de utilização	Aspetos fortes	Aspetos frágeis
a)	Recurso à expressão do modelo	88% (14 alunos)		-Introdução da expressão na calculadora gráfica; -Determinação do intervalo de tempo decorrido.
b)	Recurso aos logaritmos	6% (1 aluno)	-Desenvolvimento do cálculo algébrico; -Interiorização das propriedades.	
b)	Aproximação por tentativa-erro	6% (1 aluno)	-Perceção do crescimento do modelo;	
c)	Análise gráfica (na calculadora)	0%	-Leitura do gráfico.	-Definição da janela de visualização.

Das dezasseis resoluções entregues pelos alunos, analisam-se seis delas, consideradas mais representativas.

Resolução do aluno A13

O aluno *calculou erradamente* o valor de $e^{-0,5x4}$ o que influenciou o resultado final. O erro do aluno surgiu na falta da colocação dos parênteses no expoente quando introduziu a expressão na calculadora. Nota-se também a *notação* N(1976) em vez de N(4) resultante da má interpretação de "... lobos existentes no parque, t anos após o início de 1972". No entanto o aluno escreve corretamente N(0)=400 para a expressão da população inicial. O cálculo que ele apresenta está correto, considerando t=4. Não há evidências do aluno pôr em causa o resultado apresentado, 215 lobos, apesar do enunciado referir que inicialmente o número de lobos é de 400 e que este número aumenta, representando assim uma contradição.


a)

N = nº de lobos

t = tempo decorrido

$N(0) = 400$

$e: e^{-0,5\times4} = 2,426$

$1972 - 1976 = 4$ anos

$N(t) = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-0,5t}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N = \frac{1000}{1+1,5\times 2,426} \Leftrightarrow$

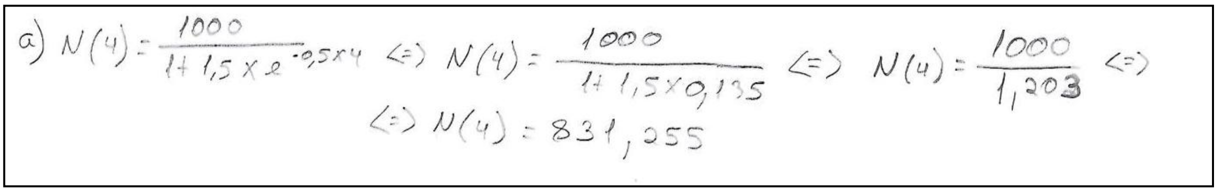
$\Leftrightarrow N = \frac{1000}{4,639} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N(1976) = 215$

Ilustração 24 – Resolução do aluno A13 do problema *Proteção dos lobos*

Resolução do aluno A15

O aluno apresenta como solução para o número de lobos em 1976, 831.255. Ele não teve o cuidado de representar o número aproximado ao número natural mais próximo. No entanto, verificar-se-á no teste de junho que o aluno arredonda para 403 coelhos a igualdade P(6)=402.653, revelando preocupação quanto à *aplicabilidade do resultado* à realidade.

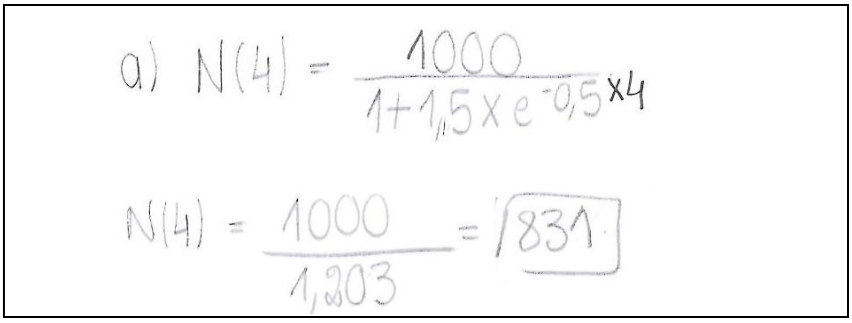

a) $N(4) = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-0,5\times4}} \Leftrightarrow N(4) = \frac{1000}{1+1,5\times0,135} \Leftrightarrow N(4) = \frac{1000}{1,203} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N(4) = 831,255$

Ilustração 25 – Resolução do aluno A15 do problema *Proteção dos lobos*

Resolução da aluna A14

Na resposta que a aluna apresenta, ela *arredonda o resultado* para o número natural mais próximo. Ela mostra evidências de considerar o resultado como sendo aplicável à realidade. Afasta-se assim da tendência manifestada por muitos alunos, de considerar os resultados matemáticos como sendo desligados da realidade e poderem não fazer sentido no mundo real. Repara-se que a aluna usa o sinal de igualdade em vez de usar o sinal de aproximação.

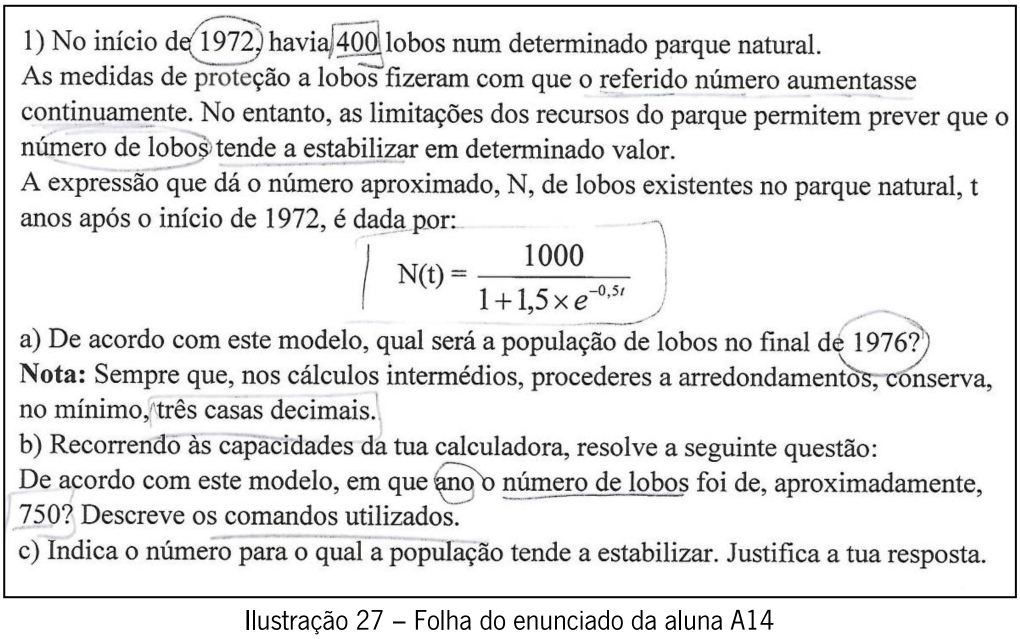


a) $N(4) = \frac{1000}{1+1,5 \times e^{-0,5} \times 4}$

$N(4) = \frac{1000}{1,203} = \boxed{831}$

Ilustração 26 – Resolução da aluna A14 do problema *Proteção dos lobos*

Apresenta-se o enunciado da aluna, para mostrar que ela *destaca os dados* do enunciado que considera relevantes, sublinhando-os.



1) No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural.
As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. No entanto, as limitações dos recursos do parque permitem prever que o número de lobos tende a estabilizar em determinado valor.
A expressão que dá o número aproximado, N, de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972, é dada por:

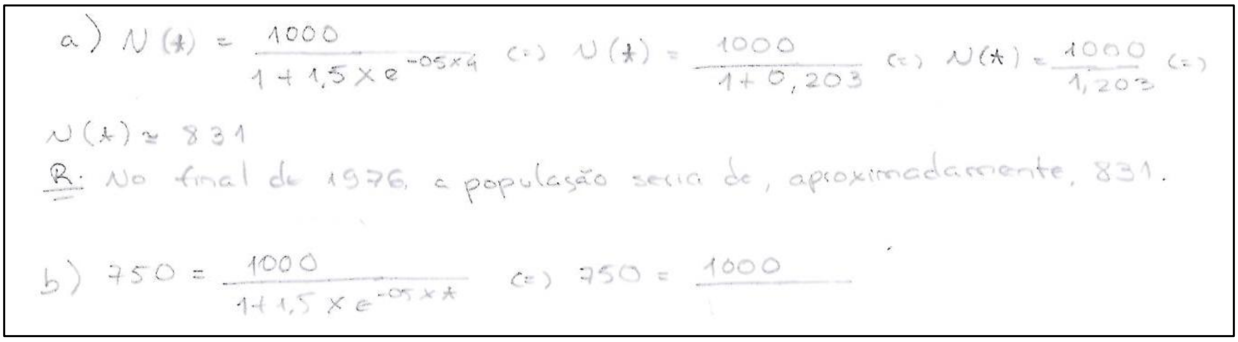
$$N(t) = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-0,5t}}$$

a) De acordo com este modelo, qual será a população de lobos no final de 1976?
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.
b) Recorrendo às capacidades da tua calculadora, resolve a seguinte questão:
De acordo com este modelo, em que ano o número de lobos foi de, aproximadamente, 750? Descreve os comandos utilizados.
c) Indica o número para o qual a população tende a estabilizar. Justifica a tua resposta.

Ilustração 27 – Folha do enunciado da aluna A14

Resolução da aluna A5

A aluna apresenta corretamente o resultado na forma de um número natural e como sendo *uma aproximação*. No entanto, ela comete o mesmo erro que os seus colegas. Considera que desde o início do ano de 1972 até ao final do ano de 1976 passaram apenas quatro anos, quando na realidade passaram cinco. Na alínea b, a aluna mostra perceber que a solução obtém-se igualando a expressão a 750. No entanto não consegue resolver a equação. A aluna não consegue isolar a incógnita *t* e explicitar a sua expressão, revelando *dificuldades de aplicação das regras operatórias*.


a) $N(t) = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-05\times 4}} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1000}{1+0,203} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1000}{1,203} \Leftrightarrow$

$N(t) \simeq 831$

R: No final de 1976 a população seria de, aproximadamente, 831.

b) $750 = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-05\times t}} \Leftrightarrow 750 = \frac{1000}{}$

Ilustração 28 – Resolução da aluna A5 do problema *Proteção dos lobos*

Resolução da aluna A6

A aluna entrega a sua resolução deste problema digitalmente numa folha de Excel. Para a alínea a, ela apresenta corretamente o número de anos desde o início de 1972 até ao final de 1976. Para calcular a população de lobos nesse ano, ela introduz a expressão N(t) e, substitui *t* por 5. Não apresentou um número natural como aproximação, o que revela que a aluna não atribui importância à *aplicabilidade do resultado à realidade*.

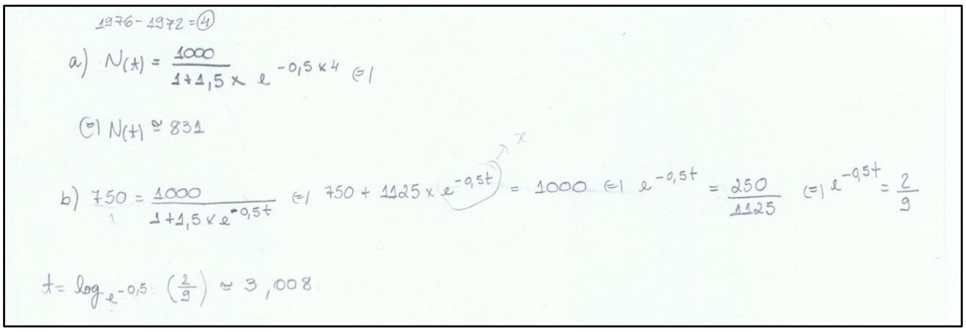
Na alínea seguinte, ela apresenta implicitamente como solução o número 3.01 anos. Este resultado repete o erro cometido na alínea anterior ao não considerar números naturais para representar a quantidade de animais, mas nesta alínea para considerar o número de anos.

n(t)=1000/(1+1,5*exp(-0,5*t))					
1972=	400				
1976=	?				
a					
n(5)=1000/(1+1,5*exp(-0,5*5))					
890,3709					
b					
750=1000/(1+1,5*exp(-0,5*t))					
substitui o t por valores até obter aproximadamente 750.					
750,1729					
750,1729=	1000/(1+1,5*EXP(-0,5*3,01))				

Ilustração 29 – Resolução da aluna A6 do problema *Proteção dos lobos*

Resolução da aluna A2

Na alínea a, a aluna determina do mesmo modo que o aluno A13, o intervalo de tempo desde 1972 até 1976 sem considerar o início de 1972 e o final de 1976. A expressão foi corretamente inserida na calculadora e ela devolve o resultado como aproximação. Nota-se que neste problema, a aluna não substitui *t* por 4 em N(*t*). Na alínea b, a aluna põe corretamente a igualdade para responder à questão. Para resolver a equação ela recorre às *propriedades de cálculo dos logaritmos*.



$1976 - 1972 = 4$

a) $N(t) = \dfrac{1000}{1+1,5 \times e^{-0,5\times 4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N(t) \cong 831$

b) $750 = \dfrac{1000}{1+1,5\times e^{-0,5t}} \Leftrightarrow 750 + 1125 \times e^{-0,5t} = 1000 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \dfrac{250}{1125} \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \dfrac{2}{9}$

$t = \log_{e^{-0,5}} \left(\dfrac{2}{9}\right) \cong 3,008$

Ilustração 30 – Resolução da aluna A2 do problema *Proteção dos lobos*

3.3. Situações na sala de aula

Durante a intervenção supervisionada e de um modo mais abrangente, durante todo o ano letivo 2011/2012, observaram-se durante o acompanhamento dos alunos, situações na sala de aula que evidenciam algumas das suas dificuldades, relativamente à resolução de problemas. Reproduzem-se três situações exemplificativas.

3.3.1. Situação I – Descoberta de um padrão

O estudo das progressões aritméticas e das progressões geométricas é propício à abordagem da resolução de problemas por *descoberta de um padrão*. Assim durante as aulas dedicadas às progressões elaborei duas fichas com várias tarefas que, para serem resolvidas requeriam o recurso àquela estratégia. Percorrendo os grupos que realizavam as tarefas da ficha, observou-se que a quinta tarefa, que se reproduz na Ilustração 31, levantou dificuldades.

5) Completa a tabela com os números naturais pares de acordo com a sua ordem.

Ordem	Termo	Expressão
1ª	2	1 x 2
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
$n^{ésima}$		

Ilustração 31 – Tarefa 5 da segunda ficha

A aluna A11, insere-se no grupo dos alunos que apresentam as resoluções dos problemas mais incompletas. No final da aula, foi reconstruído no diário de bordo, o diálogo tido com a aluna, relativamente à resolução desta tarefa. Reproduz-se o diálogo.

A11: S'tor! O que é para fazer?
Prof.: O que pede o enunciado?
A11: É para completar a tabela.
Prof.: Completar com o quê?
A11: Com os números pares.
Prof.: Segundo qualquer ordem?
A11: Não sei.
Prof.: O que diz o enunciado?
A11: É com os números naturais de acordo com a sua ordem. Como é que sei a sua ordem?
Prof.: Qual é o primeiro número natural par que conheces?
A11: O que é um número natural?
Prof.: São os números que utilizamos "naturalmente" para contar ou para ordenar. Por exemplo, o 1.º dia do ano, o 2.º, o 3.º, etc.
A11: É o 2.
Prof.: E o segundo?
A11: É o 4.
Prof.: Podes continuar a completar a tabela.

Esta situação é exemplificativa das dificuldades de resolução observadas durante o acompanhamento dos alunos na resolução de problemas. Constatou-se em algumas situações, que os alunos iniciavam a resolução de uma tarefa após fazer uma *leitura superficial*. Contrariamente, alunos mais experientes na resolução de problemas, quando questionados revelam ter uma maior consciência dos dados fornecidos pelo enunciado. Da leitura superficial, permanecem dificuldades de compreensão relativamente àquilo que é solicitado, o que leva os alunos a questionar o professor ou em alguns casos mais extremos a desistir da tentativa de resolução. Os alunos demonstram, através da análise das suas respostas ao questionário, que sentem a necessidade de algum silêncio para resolver problemas. A *ausência de silêncio* pode propiciar leituras mais superficiais.

No caso da tarefa 5, a aluna não recorreu, na notação que utilizou, à utilização de índices para fazer uma correspondência entre os termos e a sua ordem, aliás como outros alunos considerados mais experientes. A aluna não conseguiu determinar o termo de ordem n.

Consultando outros grupos, onde estavam alunos considerados com um nível moderado de capacidades de resolução de problemas, a tabela foi preenchida até à penúltima linha. A *generalização* feita pela descoberta de um padrão levantou dificuldades o que levou a que a tarefa fosse discutida com o apoio do quadro branco.

3.3.2. Situação II – Dificuldades de leitura

Na aula do dia 7 de fevereiro, na resolução do problema número 7 da terceira ficha de tarefas, vários alunos respondem à pergunta "quantos livros imprimirão no final de oito meses de produção?”, 17 000. Esta resposta corresponde à quantidade de livros produzidos no oitavo mês. A aluna A14 deu a mesma resposta o que me levou a questioná-la “e quantos livros foram produzidos no oitavo mês?”. Esta pergunta provocou um *Insight* na aluna que imediatamente corrigiu, “17 000 é a resposta à sua questão professor! A resposta à questão do problema é igual ao somatório das produções dos primeiros oito meses”.

Na mesma aula, o aluno A15 resolve o problema, retirado da *internet,* www.vestibularsc.com.br, cujo enunciado se reproduz:

> Uma sala de certo teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim sucessivamente até a décima terceira fila que é a última. Determina a lotação da sala”.

O aluno A8 apresenta como solução, 702 lugares. Questionei o aluno sobre o método da sua resolução ao que ele respondeu que determinou os lugares da primeira até a décima fila e somou todos os lugares. Pedi então ao aluno para que ele *relesse o enunciado*. Ele apercebeu-se de imediato que não tinha lido corretamente o enunciado, o que o levou a contar os lugares até a décima fila em vez de os contar até a décima terceira fila. Este aluno mostrou noutros momentos ter dificuldades de leitura, nomeadamente no teste diagnóstico, quando dá como resposta o maior desvio padrão apesar da atividade solicitar o menor.

Estas duas situações, exemplificam o que Whimbey (1986) denomina de *one-shot thinking*. Depois de fazer a leitura do enunciado, que em muitos casos é única, os alunos ficam com a perceção daquilo que devem fazer, sem no entanto *confirmar uma segunda vez*.

3.3.3. Situação III – Aplicação imediata do que se acabou de aprender

Na aula do dia 11 de abril, eu acompanho os alunos na resolução da tarefa com o enunciado “Verifique se existem circuitos hamiltonianos começando em A e, em caso afirmativo, indique um.” O aluno A15 responde precipitadamente, “não existe um circuito hamiltoniano, porque o grafo tem mais de dois vértices com grau ímpar”. Foi dado numa aula anterior, o Teorema do caminho de Euler que estabelece que, um grafo admite um caminho *euleriano* se e só se é conexo e no máximo dois dos seus vértices têm grau ímpar. Pode-se suspeitar que o aluno queria aplicar o teorema independentemente das condições fornecidas pelo enunciado, já que tinha aprendido uma regra e que era natural aplicá-la após ter sido dada pelo professor. Esta situação é congruente com a ideia, referida por Brito (2008) que frequentemente os alunos tentam, aplicar os conhecimentos adquiridos recentemente apesar de não serem aplicáveis.

3.4. Perceções dos alunos relativamente à resolução de problemas matemáticos

De modo a conhecer as perceções dos alunos relativamente ao tema da resolução de problemas matemáticos, realizou-se um questionário focado no tema. O questionário, que se encontra no Anexo 3, foi submetido aos alunos no dia 25 de maio de 2012. Neste subcapítulo faz-se uma análise das respostas dadas pelos alunos. As respostas estão organizadas numa tabela que se encontra no Anexo 4. Em cada célula da tabela coloca-se a indicação Ax, com x variando de 1 a 16, correspondendo à resposta do aluno Ax. Esta numeração, idêntica àquela usada na Tabela 6, é aleatória, sem correspondência com a numeração dos alunos dentro da turma. O questionário é composto por cinquenta e três afirmações pensadas de modo a que os alunos evidenciassem as suas conceções relativamente aos problemas matemáticos e às dificuldades encontradas durante a sua resolução. Para verificar o nível de concordância dos alunos, usou-se uma escala de Lickert. Cada afirmação é avaliada selecionando um dos cinco itens possíveis: Discordo Totalmente; Discordo; Indiferente; Concordo; Concordo Totalmente. Foi uma escolha ponderada manter o item "Indiferente" de modo a não forçar uma resposta positiva ou negativa. É importante referir que o questionário foi respondido por dezasseis alunos, correspondente ao universo dos alunos inscritos na disciplina de MACS, no entanto não constitui uma amostra estatisticamente significativa.

O primeiro grupo de afirmações tinha como objetivo, verificar a existência de uma tendência que fosse ao encontro de algumas características, que autores consultados defendem diferenciar os *resolvedores* de problemas experientes dos iniciantes. Não se verifica uma diferença significativa ao nível das características do primeiro grupo de afirmações. Por exemplo, todos os alunos considerados iniciantes ou experientes, concordam ou concordam totalmente com a afirmação "Procuro sempre terminar as tarefas que inicio". Do mesmo modo se observa um equilíbrio entre esses alunos na afirmação "Quando não sei uma resposta tento adivinhá-la", com um aluno de cada nível a responder discordar com essa afirmação e outros dois alunos de cada nível a concordar com ela.

Na afirmação "Gosto de momentos na aula em que o professor expõe a matéria", duas das alunas consideradas experientes responderam discordar. Foram as únicas alunas a responder deste modo à esta afirmação. A terceira aluna classificada com o nível de experiente, respondeu ser-lhe indiferente. Por oposição, três das quatro alunas consideradas iniciantes, responderam à mesma afirmação, concordar. A quarta aluna considerada como iniciante, respondeu concordar totalmente, sendo a única a responder deste modo à afirmação. Estas respostas podem levar a crer que as competências de resolução de problemas estão diretamente relacionadas com a *predisposição dos alunos à atividade prática*. De facto, os alunos considerados como iniciantes, respondem maioritariamente gostar de momentos expositivos. Por oposição, as alunas consideradas mais experientes responderam maioritariamente não gostar dos momentos expositivos, levando a acreditar que as suas preferências recaem nos momentos de atividade prática. Assim, a atividade na resolução de problemas parece ser, como defende Whimbey (1986), uma característica diferenciadora entre *resolvedores* de problemas experientes e iniciantes.

Na definição de problema matemático, há uma maior concordância com a afirmação "Um problema matemático é uma situação que pretendemos resolver mas da qual desconhecemos, inicialmente, o método de resolução" relativamente à afirmação "Um problema matemático é diferente de um exercício por causa do grau de dificuldade". Para a primeira afirmação concordaram 75% dos alunos contra os 63% dos alunos que concordaram com a segunda, mostrando a predominância do processo de resolução sobre o nível de dificuldade, como característica de um problema. Esta consciência relativamente à *importância do processo* é reforçada com o elevado nível de concordância com a afirmação "Um problema matemático é uma situação que para ser resolvida é necessário envolver diferentes tipos de conhecimentos e experiências", em que 81% dos alunos concordaram (37% concordam e 44% concordam totalmente).

O *sentimento de ansiedade*, durante a resolução de problemas, parece ser uma variável diferenciadora entre os bons e os menos bons *resolvedores* de problemas. De facto, cruzando as respostas dos alunos com às suas classificações na resolução de problemas, todos os alunos considerados como iniciantes, quatro ao todo, concordam com a afirmação "Na resolução de problemas matemáticos sinto ansiedade". Por oposição, dois dos três alunos considerados experientes, discordam totalmente com a mesma afirmação. Esta observação levanta outras questões. O sentimento de ansiedade ou a falta deste sentimento, é uma característica do pior, ou respetivamente do melhor desempenho na resolução de problemas? Ou pelo contrário, o sentimento de ansiedade ou a sua falta, surge como uma consequência do pior ou respetivamente do melhor, desempenho do aluno? Poder-se-á colocar a hipótese que a segurança e a confiança são sentimentos importantes que devem ser desenvolvidos nos alunos, de modo a que estes melhorem as suas capacidades de resolução de problemas.

Quanto à frequência de utilização das diferentes estratégias de resolução de problemas, é possível verificar algumas tendências através da análise das respostas dos alunos. A estratégia de resolução à qual os alunos concordaram recorrer com maior frequência corresponde à *resolução por partes*, com 94% (75% concordam e 19% concordam totalmente). Esta alta percentagem de concordância é congruente com as resoluções analisadas, em que os alunos frequentemente dividem os problemas em metas parciais. Já a estratégia à qual responderam recorrer com menor frequência corresponde à *resolução do fim para o início*, com 69% dos alunos a discordarem de usar frequentemente esta estratégia (38% discordam totalmente e 31% discordam).

Os alunos respondem recorrer com grande frequência à construção de tabelas, (63% concordam e 6% concordam totalmente). A indisponibilidade de computadores na sala de aula pode justificar a alta percentagem de alunos que discordam de recorrer àquele meio para resolver problemas (25% discordam totalmente e 25% discordam). Já no recurso à utilização da calculadora e na aplicação de fórmulas observam-se as mais altas percentagens de concordância, com 100% (31 concordam e 69% concordam totalmente) e 94% (94% concordam) respetivamente.

É interessante observar que 44% e 50% dos alunos responderam concordar e concordar totalmente, respectivamente, com a afirmação "Quando resolvo problemas procuro ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido". Foram observadas, em várias resoluções dos alunos, *dificuldades de leitura*, como exemplificado no subcapítulo 3.3.2., algumas das quais poderiam ser ultrapassadas com uma segunda leitura mais atenta. Esta alta percentagem de concordância com aquela afirmação tende a comprovar a existência em alguns alunos daquilo que Whimbey (1986) denomina de *one-shot thinking*. Após a primeira leitura, o aluno elabora o percurso de resolução sem confirmar se de facto, está a responder ao que o enunciado solicita. Será então que esta convicção, que o percurso de resolução é correto, previne uma segunda leitura do enunciado?

Observa-se uma curiosidade, quando se analisa as respostas à afirmação "Quando resolvo problemas procuro resolver tudo seguido e verificar no final". As três alunas consideradas experientes responderam discordar com esta afirmação. Duas alunas consideradas como iniciantes, responderam que lhes era indiferente, uma outra respondeu que concordava e ainda outra respondeu concordar totalmente. Estas respostas levam a crer que as alunas consideradas mais experientes na resolução de problemas dispõem de um *sistema de* *verificação* não no final da resolução do problema, mas sim durante a própria resolução, detetando precocemente possíveis erros e atuando de imediato na sua correção, como defendem Bransford, John, Brown e Cocking (1999). Por oposição as alunas consideradas iniciantes, ao comprovar-se que verificam as suas resoluções, realizam esta verificação no fim da resolução, quando esforços de resolução foram já gastos e é ainda necessário repeti-los.

Quanto às dificuldades de resolução de problemas, observa-se um certo equilíbrio entre os elementos da turma. Relativamente às dificuldades de interpretação do enunciado, 38% dos alunos discordam que essa seja uma das suas dificuldades contra 44% dos alunos que concordam. Para as dificuldades resultantes da *falta de hábito de trabalho* na resolução de problemas, 44% dos alunos discordam que essa seja uma das suas dificuldades contra 38% dos alunos que concordam. A afirmação onde revelam ter menos dificuldades é relativa à *coleta e à organização dos dados*, em que os alunos mais discordam (31% discordam totalmente e 31% discorda). Observa-se que três dos quatro alunos considerados iniciantes revelaram não sentir *falta de motivação*, o que é congruente com o facto dos quatro alunos considerados iniciantes, sentirem *gosto pelo desafio*. Existem então algumas condições necessárias para desenvolver as capacidades de resolução de problemas, mas faltam ainda outras. Os alunos respondem maioritariamente, com uma percentagem de concordância de 81%, sentir a *necessidade de algum silêncio* para pensar no problema. O silêncio na sala de aula e de um modo mais genérico as condições de conforto, não foram variáveis analisadas rigorosamente durante o acompanhamento dos alunos, mas poderão sê-lo em investigações futuras. A mesma percentagem de alunos, 48%, concorda e discorda com a afirmação "Algumas das minhas dificuldades, na resolução de problemas matemáticos, são devidas à falta de bases a matemática". Nota-se que relativamente à esta dificuldade, dois alunos considerados experientes afirmam discordar da afirmação. Já três alunos considerados iniciantes afirmam concordar com aquela afirmação. Esta nota leva a considerar que a detenção de *bases matemáticas* constitui um fator diferenciador entre *resolvedores* iniciantes e experientes. Outra dificuldade em que se nota uma tendência relativamente aos níveis considerados é referente ao *raciocínio lógico*. Dois alunos considerados experientes discordam que as suas dificuldades sejam devidas àquela capacidade. Já dois alunos considerados iniciantes afirmam concordar com o facto das suas dificuldades serem devidas ao raciocínio lógico.

De modo geral os alunos reconhecem a importância da resolução de problemas. Consultando as respostas dos alunos é possível verificar que 69% dos alunos consideram que a resolução de problemas é importante para o seu dia a dia. A afirmação em que os alunos consideraram que a resolução de problemas é mais importante é relativa ao desenvolvimento do raciocínio lógico, com 100% de concordância (56% concordam e 44% concordam totalmente). O item em que os alunos mostram estar em maior desacordo ou indiferentes é relativo ao desenvolvimento da comunicação (6% discordam totalmente, 6% discordam e 44% são indiferentes).

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES, REFLEXÕES, LIMITAÇÕES e RECOMENDAÇÕES

Este capítulo está dividido em três secções. Na primeira – *Conclusões*, elaboram-se as conclusões relativas a cada um dos três objetivos de investigação. Na segunda secção – *Reflexões sobre o projeto*, listam-se algumas considerações pessoais relativas à importância do projeto. Por fim, na última secção – *Limitações e recomendações*, referem-se algumas dificuldades sentidas durante a elaboração do projeto e sugerem-se algumas propostas de atividades futuras.

4.1. Conclusões

Neste subcapítulo elaboram-se as conclusões relativas aos três objetivos propostos para a realização do projeto.

4.1.1. Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam quando resolvem problemas matemáticos

Seguem na Tabela 7, as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas. Os números dos problemas, de acordo com a sua ordem de apresentação, seguem a seguinte codificação: 1 – *Depósito a prazo*; 2 – *Toldos de praia*; 3 – *Venda de eletrodomésticos*; 4 – *Juros compostos*; 5 – *Proteção dos lobos*.

Tabela 7 – Resumo das estratégias usadas pelos alunos

Problema/ alínea	Modelação com recurso à expressão/fórmula do modelo	Divisão do problema	Generalização	Criação de uma lista/tabela	Algébrica	Tentativa e erro
1	50% (8 alunos)	50% (8 alunos)	-	-	-	-
2	-	88% (14 alunos)	83% (13 alunos)	88% (14 alunos)	-	-
3 – a)	67% (4 grupos)	-	33% (2 grupos)	-	-	-
3 – b)	-	-	-	83% (5 grupos)	17% (1 grupo)	-
3 – c)	-	-	-	100% (6 grupos)	-	-
4	67% (4 grupos)	-	-	67% (4 grupos)	67% (4 grupos)	-
5 – a)	88% (14 alunos)	-	-	-	-	-
5 – b)	-	-	-	-	6% (1 aluno)	6% (1 aluno)

Tomando como referência as análises feitas às resoluções dos cinco problemas transcritos neste relatório, é possível verificar que exceptuando o problema *Toldos de praia*, em todos os outros, os alunos recorreram à *estratégia de modelação com recurso à expressão/fórmula* do modelo. Esta observação é consistente com a perceção dos alunos que responderam maioritariamente (96%) concordar com a afirmação "Na resolução de problemas recorro com frequência à aplicação de fórmulas". Assim, esta foi a estratégia de resolução de problemas mais utilizada pelos alunos.

A *divisão do problema em partes* aparece como uma outra estratégia à qual os alunos recorreram com frequência. Sendo também, como refere Lopes (2002), uma estratégia de simplificação, ela surge utilizada em conjugação com outras estratégias, nomeadamente a criação de uma lista ou tabela. Esta última foi a segunda estratégia à qual os alunos mais recorreram na resolução dos problemas. Trata-se de uma importante estratégia para desenvolver a sistematização e a organização dos dados frequentemente essenciais para determinar padrões e possibilitar generalizações.

Verificou-se que a *estratégia algébrica*, usada de modo implícito em várias resoluções, foi sendo utilizada mais frequentemente, em particular com o recurso às propriedades de cálculo dos logaritmos, nos problemas que incidiram sobre os modelos logarítmico e logístico.

Do que se pôde observar, confirmado pela análise das respostas ao questionário, as estratégias às quais os alunos recorreram com menor frequência são as estratégias de resolução por tentativa e erro e de resolução do fim para o início. Durante a intervenção observou-se o recurso à primeira estratégia, por tentativa e erro, apenas por uma aluna na resolução de um dos problemas. Relativamente à segunda estratégia, não foi detetado nenhum caso em que os alunos a tenham utilizado. Importa no entanto referir que a estratégia de resolução do fim para o início não se revelava uma boa opção para qualquer um dos problemas propostos.

4.1.2. Reconhecer os aspetos fortes e os aspetos frágeis das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos

A aplicação correta de uma fórmula implica que o aluno tenha conhecimento das regras das operações presentes nessa fórmula. Das resoluções analisadas, verificou-se que ao recorrer à estratégia de modelação, os alunos foram confrontados com dois tipos de tarefas. A primeira consistia em substituir os termos presentes na expressão e calcular o resultado. Nesta atividade, frequentemente apoiada pela calculadora gráfica, não se observaram aspetos relevantes. Na segunda tarefa a qual foram confrontados os alunos, consistia em igualar a expressão e, isolar algum termo, pondo-o em evidência. Exemplifica-se essa atividade com as resoluções do problema *Proteção dos lobos*. Para a resolução deste problema, dos dezasseis alunos que entregaram as suas resoluções, três alunas conseguiram identificar a igualdade para resolver a alínea b, sendo que apenas duas apresentaram o resultado final. As *manipulações algébricas*, satisfazendo as propriedades de cálculo constituíram um ponto frágil do recurso à estratégia de modelação, sobretudo para os alunos com lacunas ao nível das bases matemáticas.

Salienta-se como outro ponto frágil do recurso à estratégia de modelação, a *falta de perceção da evolução do modelo*. Um exemplo que ilustra este facto é a determinação da proposta do valor c, no problema *Depósito a prazo*, da aluna A3. Por oposição, o recurso a uma lista organizada permite obter uma *melhor visualização* da evolução do modelo. Através de uma lista dos valores sucessivos, como por exemplo se observa na resolução do problema *Venda de eletrodomésticos*, da aluna A9, é possível concluir facilmente que o crescimento é constante e de três unidades. No entanto, o recurso a uma lista pode não ser preferível à estratégia de modelação, salientando-se como ponto forte desta última estratégia, a facilidade de cálculo independentemente do valor da variável. Considera-se o exemplo da resolução da aluna A9, do problema *Juros compostos*. A aluna cria uma lista de valores, obtidos por iteração de um algoritmo baseado na *regra de três simples*. Esta estratégia, com recurso apenas ao lápis, papel e calculadora, revela-se impraticável, se os períodos de capitalização forem numerosos, salientando-se os *erros de arredondamento* e o *tempo necessário* para os cálculos. Por oposição, através da expressão do modelo, o cálculo é direto, independentemente da quantidade dos períodos de capitalização.

A *construção de uma lista/tabela*, é uma importante estratégia que frequentemente permite detetar padrões (Lopes,2002). Além de desenvolver a organização dos dados, como observado em algumas resoluções dos alunos, ela permite frequentemente recorrer à generalização. Nas resoluções em que os alunos recorreram à generalização, observam-se como aspectos fortes, o exercício da conjectura e, o desenvolvimento da verificação dos resultados. Por sua vez, esta última desenvolveu o sentido crítico dos alunos, especialmente na consideração da aplicabilidade do resultado à realidade, como observado no grupo que pôs em causa o número não inteiro, obtido como solução para a questão "em que mês se venderá duzentas e quarenta e duas máquinas?" Como aspeto frágil da generalização, observou-se na resolução do problema *Toldos de Praia*, a não consideração do caso específico da colocação do último toldo.

Do recurso à estratégia algébrica, observou-se como ponto frágil, em especial nos alunos com lacunas ao nível das bases matemáticas, os erros de cálculo. Como pontos fortes, observaram-se a prática relativamente às manipulações algébricas e a interiorização das propriedades de cálculo, tornando os alunos mais rápidos e portanto mais preparados para novas situações, em particular, o exame final. Observa-se na resolução ao problema *Juro Compostos*, da aluna A10, que pelo recurso à estratégia algébrica, partindo de dois casos particulares, ela usa um raciocínio dedutivo para generalizar a expressão do modelo de capitalizações compostas.

Nas resoluções apresentadas pelos alunos, a divisão do problema foi utilizada em conjunto com outras estratégias, nomeadamente a modelação e a criação de uma lista/tabela. Observou-se como ponto positivo da divisão do problema, a simplificação. A simplificação do problema consistiu na elaboração de metas parciais, mais simples, que permitiram construir o percurso de resolução.

Foi observado o recurso à estratégia por tentativa e erro. Esta, como aspeto forte, proporcionou a perceção da evolução do modelo. Através da tentativa e erro, suscitou-se à aluna um raciocínio dedutivo, de modo a definir os limites do intervalo de soluções permissíveis.

4.1.3. Listar e analisar as dificuldades que os alunos revelam durante a resolução dos problemas matemáticos

As respostas ao questionário comprovam o que se verificou na prática. De entre as dificuldades listadas no questionário, isto é, a interpretação do enunciado, a falta de hábito de trabalho na resolução de problemas, a coleta e a organização dos dados, a falta de bases matemáticas, o raciocínio lógico e, a falta de apoio para estudar, os alunos revelam ter menos dificuldades na *coleta e na organização dos dados*. As respostas ao questionário mostram que 31% dos alunos discordam totalmente e 31% discordam com a afirmação "Algumas das minhas dificuldades, na resolução de problemas matemáticos, são devidas à dificuldade na coleta e na organização dos dados". Outros 31% responderam a esta afirmação estarem indiferente.

Observou-se que ambos os alunos considerados menos e mais experientes na resolução de problemas registam nas suas folhas de resolução os dados fornecidos pelo enunciado. Quando questionados, também demonstram ter conhecimento dos dados fornecidos pelo enunciado. No entanto, os alunos menos experientes revelam dificuldades na determinação da relação que existe entre os dados fornecidos pelo enunciado e o objetivo do problema. Esta observação reforça a ideia de que ler não representa apenas a capacidade de descodificar letras, mas envolve também a capacidade de análise que permite estabelecer diferentes ligações (Silva, 2011). Este facto pode constituir um indício das unidades de conhecimento pouco organizadas e interligadas que Sternberg (1998) defende diferenciarem os *resolvedores* eficazes dos *resolvedores* iniciantes.

A falta de bases matemáticas e as dificuldades de raciocínio lógico podem estar na origem das dificuldades dos alunos na resolução dos problemas matemáticos. Esta conclusão resulta da análise das respostas dos alunos ao questionário. Apesar da mesma percentagem de alunos (48%) concordar e discordar com a afirmação "Algumas das minhas dificuldades, na resolução de problemas matemáticos, são devidas à falta de bases a matemática", observa-se uma pequena tendência relativamente aos níveis considerados das resoluções. Dois alunos considerados experientes afirmam discordar da afirmação. Já três alunos considerados iniciantes afirmam concordar com aquela afirmação. Este facto leva a conjecturar, que a detenção de bases matemáticas constitui um fator diferenciador entre *resolvedores* iniciantes e experientes.

Mantendo a comparação dos alunos pelos níveis considerados, observa-se uma tendência relativamente ao raciocínio lógico. Dois alunos considerados experientes discordam que as suas dificuldades sejam devidas àquela capacidade. Já dois alunos considerados iniciantes afirmam concordar com o facto das suas dificuldades serem devidas ao raciocínio lógico. Assim esta observação leva também a conjeturar que as capacidades de raciocínio lógico são um factor diferenciador entre *resolvedores* iniciantes e experientes.

É interessante verificar que os alunos reconhecem, a falta de bases matemáticas e as dificuldades de raciocínio lógico, como sendo limitações suas.

O *hábito de verificar os resultados* e *a sua aplicabilidade à realidade* está ainda pouco desenvolvido. A resolução de vários alunos, em que um banco oferece um capital acumulado de 250 000€ para um capital inicial de 10 000€ aplicado apenas a dois anos demonstra a consideração de que as tarefas propostas nas aulas de Matemática podem estar desligadas da realidade ou evidenciar a falta de sensibilidade crítica. O exemplo da resolução da alínea a do problema *Proteção dos lobos*, feita pelo aluno A13, demonstra uma contradição. No enunciado é referido que a população cresce, no entanto o aluno apresenta como resultado, que após quatro anos, a população é inferior à inicial.

Verificou-se no entanto uma melhoria nas resoluções apresentadas pelos alunos relativamente à aplicabilidade dos dados à realidade, nomeadamente no arredondamento dos resultados quando estes respeitam objetos indivisíveis ou ainda na consideração das unidades das quantidades envolvidas.

4.2. Reflexões sobre o projeto

A elaboração deste projeto deu origem a vários momentos de reflexão com especial incidência no tema de investigação.

De acordo com Oliveira, Segurado e Ponte (1996), ao propor aos alunos a resolução de um problema "o professor tem de pensar, como introduzir esse assunto, como promover o trabalho dos alunos, que feedback dar aos alunos durante o trabalho e como concluir a actividade" (p.207). Neste sentido, este conjunto de tarefas, presente no decorrer da intervenção, constituiu um desafio. Do mesmo modo, foi igualmente desafiante a procura de uma boa dinamização da discussão da tarefa, sugerida por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). As autoras referem-se à orquestração das aulas como sendo uma das atividades mais complexas que o professor tem de gerir nas aulas.

Com a realização deste trabalho também fiquei sensibilizado para a importância do diagnóstico precoce das dificuldades dos alunos e, da verificação da solidez dos alicerces dos seus conhecimentos matemáticos. Verificar atempadamente lacunas ao nível das bases matemáticas permite a elaboração de um plano de recuperação de modo a prevenir que o aluno acumule dificuldades.

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas está directamente ligado às estratégias que levam o aluno à descoberta de um percurso de resolução, também denominadas por *heurísticas*. Assim, a abordagem ao tema da resolução de problemas no contexto prático proporcionado pela intervenção, sensibilizou-me para a importância do questionamento. De facto, o aperfeiçoar da capacidade de formulação de perguntas favorece a participação dos alunos na aula, possibilita testar e criar conhecimentos novos, desenvolve capacidades e possibilita ainda disciplinar os alunos (Menezes, 1995).

Sintetizando, este projecto permitiu desenvolver-me académica e profissionalmente, constituindo por isso, na minha opinião, uma etapa importante para a formação de futuros professores.

4.3. Limitações e recomendações

Embora considere que esta investigação respondeu aos objetivos propostos, durante a sua realização foram sentidas algumas dificuldades e foram surgindo algumas questões que podem constituir propostas para trabalhos futuros.

O exemplo da resolução do problema *Toldos de praia* feita pela aluna A5 ilustra uma dificuldade sentida relativamente à análise das resoluções. Os alunos frequentemente elaboram raciocínios sem deixar indícios dos mesmos nas suas folhas de resolução. Este facto constituiu uma limitação na desconstrução e abstracção dos raciocínios já interiorizados, de modo a perceber o raciocínio do aluno.

Considera-se que a falta de gravação de imagem com recurso a um gravador de vídeo constituiu uma limitação. A utilização deste instrumento poderia prevenir a perda de dados que se supõem úteis à compreensão das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, além de permitir guardar momentos de discussão que poderiam enriquecer as análise elaboradas.

Consultando as respostas dos alunos à afirmação "Na resolução de problemas matemáticos sinto falta de motivação", é possível observar um certo equilíbrio relativamente às percentagens de concordância. A motivação é um de muitos aspetos afectivos que influenciam as estratégias de resolução utilizadas e as dificuldades sentidas pelos alunos. No entanto, os *aspetos afectivos* não foram objecto de investigação neste trabalho. Como se relembra, a aprendizagem não é uma questão apenas cognitiva (Carvalho, 2004, p.88). Como refere a autora, "quando pensamos nos erros e nas dificuldades, os aspetos afectivos não podem ficar esquecidos" (Carvalho, 2004, p.88). Assim, o estudo da dimensão afectiva na resolução de problemas matemáticos constitui uma proposta de trabalho futuro.

A compreensão das várias resoluções dos problemas, dos raciocínios elaborados pelos alunos e ou ainda da possível comunicação deficiente, são alguns dos factores que podem levantar algumas dificuldades ao professor. Stein et al. (2008) defendem uma discussão matemática produtiva com recurso a um modelo de cinco práticas centradas nas respostas dos alunos: Antecipar; Monitorizar; Selecionar para discussão; Criar sequência de apresentação; Evidenciar conexões. O estudo mais aprofundado do modelo proposto pelas autoras, possibilitando ultrapassar algumas das dificuldades mencionadas, constitui uma oportunidade de estudo futuro.

Charles (2011) refere que um dos motivos pelos quais tantos professores recorrem a uma abordagem por palavras-chaves ou por uma resolução por passos para ensinar a resolução de problemas pode ser porque existem poucas alternativas de *estratégias instrucionais*. A identificação e a análise dessas estratégias constitui uma proposta de trabalho futuro no sentido de promover um ensino com metodologias diversificadas e propiciar aprendizagens significativas.

Segundo Ponte, Ferreira, Varandas Brunheira e Oliveira (1999), a *formulação de problemas* é um dos aspetos característicos da resolução de problemas. Segundo os autores ela "é ainda apontada como promovendo a capacidade de resolução de problemas e a disposição para a Matemática" (Ponte et al., 1999, p.19). Os autores reforçam a importância da formulação de problemas relembrando que "esta é uma actividade que apela explicitamente à criatividade do aluno" (Ponte e al., 1999, p.19). A indissociabilidade da formulação de problemas e da resolução de problemas está expressa por Pólya que "considerava que a experiência do aluno em termos matemáticos ficaria incompleta sem a resolução de um problema inventado por ele próprio" (Pólya, 1957, citado por Palhares, 1997, p.160). Assim, considera-se importante que num futuro trabalho se investigue as diferentes estratégias de formulação de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 286-299). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação - Secção de Educação Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Borralho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção*. Lisboa: APM.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Brito, L. P. (2008). Ler e Resolver Problemas. *Educação e Matemática, 99*, 40-44.

Carlson, M., Bloom, I., & Glick, P. (2008). Promoting Effective Mathematical Practices in Students: Insights from Problem Solving Research. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Eds) *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – *Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 85-102). *Braga*: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. O exemplo dos gráficos. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P.F. Correia (Orgs.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 22-36). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Carvalho, H. (2011). As Competências dos Alunos: Resultados do PISA 2009 em Portugal. In P. Ávila, M. Nico, P. Pacheco & H. Carvalho (Orgs.), Relatório de Pesquisa. CIES-IUL.

Charles, R. (2011). *Solving Word Problems: Developing Quantitative Reasoning.* Retirado em 10 de outubro, de 2012, de, http://assets.pearsonschool.com/asset_mgr/current/201218/MatMon110890Charles_SWP_Revise_eBook.pdf

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1994). *How to evaluate progress in problem solving.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal*. Revista Portuguesa de Educação, 15* (1), 221-243.

Demana, F., & Waits, B. (1994). Graphing calculator and computer precalculus projects (C2PC): What have we learned in ten years? In A. Slow (Ed.), *Preparing for a new calculus conference proceedings*. Washington: The Mathematical Association of America.

Ernest, P. (1992). Problem solving: Its assimilation to the teacher' s perspective. In J. P. Ponte, J. F. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies*. Germany: NATO ASI Series, vol. 89.

Ferreira, H. (2004). *A evolução do ensino da matemática em Portugal no século XX: presença de processos criativos.* Dissertação para obtenção do grau de Mestre. Universidade do Minho.

Kantowski, M. G. (1974). *Processes involved in Mathematical Problem Solving.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics Education Research - implications for the 80's* (pp.111-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-16). Hillsdale: Lawrance Erlbaum Associates.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, *54* (3), 363-407.

Lapassad, G. (2001). L' observation participante. *Revista Europeia de Etnografia da Educação, 1*, 9-26.

Lester, F. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IIE.

Lopes, A. J. (1994). Resolução de Problemas: observações a partir do desempenho dos alunos. A educação Matemática em revista. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática 3*, 33-40.

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática.* Porto: ASA Editores.

Martins, V. (2000). *Para uma pedagogia da criatividade.* Porto: Asa Editores.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mayer, R. E. (1996). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: Freeman.

Menezes, L. (1995). Concepções e prácticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta. Tese de mestrado. Acedido em 25 de janeiro de 2013 em http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1145/1/Menezes_tese_mestrado_1995.pdf

Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Orgs.), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* (pp. 105-116). Secção de Educação Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Lisboa.

Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

NCTM (1980). *An agenda for action*. Reston,VA: NCTM.

NCTM (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

NCTM (1991). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM

NCTM (1994). *Normas para o ensino da matemática*. Lisboa: APM

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (M. Melo, trad.). Lisboa: APM.

Organization for Economic Co-operation and Development (2002). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment. Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Paris: OECD Publications.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. *Actas do ProfMat96* (pp. 207-213). Lisboa: APM

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Orgs), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 159-188). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção*. Lisboa: APM.

Pólya, G. (1968). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Wiley.

Pólya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik & R. Rey (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 1-2). Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: Um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*, *23*, 15-19.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3* (1), 3-17.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silva, M. (2011). *Problemas de interpretação na leitura e sua relação com a matemática na resolução de problemas*. Retirado em 15 de janeiro, de 2013, de http://www.artigonal.com/educacao-online-artigos/problemas-de-interpretacao-na-leitura-e-sua-relacao-com-a-matematica-na-resolucao-de-problemas-4925127.html

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, *1*, 4-8.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (p.1-22). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell*. Retirado em 23 de janeiro, de 2013, de http://bear.berkeley.edu/faculty/RAEngle/SteinEngleSmithHughes(inpress).pdf

Sternberg, R. J. (1997). *Successful intelligence: how practical and creative intelligence determine success in life*. New York, NY: Plume.

Sternberg, R. J. (1998). *In search of the human mind.* Orlando, FL: Hartcourt Brace College.

Tuckman, W. (2002). *Manual de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Wheatley, G. H. (1984). The Importance of Beliefs and Expectations in the Problem Solving Performance of Sixth Grade Pupils. In J. M. Moser (Ed.). *Proceedings of the Sixth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for PME* (pp. 141-46). Madison, Wis.

Whimbey, A., & Lochheah, J. (1986). *Problem solving and comprehension*. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

ANEXOS

ANEXO 1

Folha da atividade *Toldos de praia*

Disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Curso Científico - Humanístico de Ciências Sociais e Humanas **11º Ano Turma P**

Nome:____

Numa praia, um banheiro tem de colocar 20 toldos em fila. O armazém está a dez metros do local onde o primeiro toldo tem de ser colocado. Imagine que ele só transporta um toldo de cada vez e que os toldos estão distanciados entre si cinco metros. Quantos metros percorrerá o banheiro para colocar todos os toldos?

ANEXO 2

Folha da atividade *Proteção dos lobos*

Nome:____

No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural.
As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. No entanto, as limitações dos recursos do parque permitem prever que o número de lobos tende a estabilizar em determinado valor.
A expressão que dá o número aproximado, N, de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972, é dada por:

$$N(t) = \frac{1000}{1+1,5\times e^{-0,5t}}$$

a) De acordo com este modelo, qual será a população de lobos no final de 1976?
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.
b) Recorrendo às capacidades da tua calculadora, resolve a seguinte questão:
De acordo com este modelo, em que ano o número de lobos foi de, aproximadamente, 750? Descreve os comandos utilizados.
c) Indica o número para o qual a população tende a estabilizar. Justifica a tua resposta.

ANEXO 3

Questionário

O presente questionário tem como objetivo conhecer algumas das tuas opiniões sobre alguns pontos gerais e, em particular, sobre a resolução de problemas matemáticos. Este questionário é confidencial, sendo apenas utilizado para fins de investigação. Não há respostas erradas.

Muito obrigado pela tua colaboração.

Jorge Teixeira

Nome:____

Idade:_______

Qual foi a tua classificação na disciplina de MACS no primeiro e no segundo período?

No primeiro período:_____ No segundo período:_____

Quantas horas estudas semanalmente para a disciplina de MACS? ______________________

Quais são as tuas perspetivas profissionais?____

____

Nas afirmações seguintes, assinala com (X) no quadrado que se adequa mais à tua opinião, considerando a seguinte escala:
DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente.

	DT	D	I	C	CT
Gosto de matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Tenho uma atitude otimista.	☐	☐	☐	☐	☐
Sou preocupado com a exatidão.	☐	☐	☐	☐	☐
Procuro sempre terminar as tarefas que inicio.	☐	☐	☐	☐	☐
Quando não sei a resposta tento adivinhá-la.	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto de momentos na aulas em que:					
O professor expõe a matéria.	☐	☐	☐	☐	☐
Realizo trabalho individual.	☐	☐	☐	☐	☐
Utilizo materiais manipuláveis.	☐	☐	☐	☐	☐
Trabalho em grupo.	☐	☐	☐	☐	☐
Percebo a utilidade da matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____________________________________					

	DT	D	I	C	CT
Gosto das aulas em que:					
O professor propõe uma ficha de tarefas.	☐	☐	☐	☐	☐
O professor apresenta referências históricas.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolvemos problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____________________________					
Um problema matemático é:					
Diferente de um exercício por causa do grau de dificuldade.	☐	☐	☐	☐	☐
Uma situação que pretendemos resolver mas da qual desconhecemos, inicialmente, o método de resolução.	☐	☐	☐	☐	☐
Um enunciado formulado para introduzir matéria nova.	☐	☐	☐	☐	☐
Uma situação que para ser resolvida é necessário envolver diferentes tipos de conhecimentos e experiências.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____________________________					
Na resolução de problemas matemáticos sinto:					
Falta de motivação.	☐	☐	☐	☐	☐
Satisfação pela atividade intelectual.	☐	☐	☐	☐	☐
Dificuldade em abstrair-me de problemas exteriores (sociais, familiares, ...).	☐	☐	☐	☐	☐
Que aplico conhecimentos das minhas experiências pessoais.	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto pelo desafio.	☐	☐	☐	☐	☐
Ansiedade.	☐	☐	☐	☐	☐
Necessidade de algum silêncio para pensar no problema.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____________________________					
Na resolução de problemas uso com frequência a estratégia de:					
Tentativa e erro.	☐	☐	☐	☐	☐
Procura de um padrão.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolução por partes.	☐	☐	☐	☐	☐
Eliminação.	☐	☐	☐	☐	☐
Dedução.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolução do fim para o início.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____________________________					

	DT	D	I	C	CT
Na resolução de problemas recorro com frequência a (ao):					
Construção de diagramas/figuras.	☐	☐	☐	☐	☐
Construção de tabelas.	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação de fórmulas.	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação de equações.	☐	☐	☐	☐	☐
Uso do computador.	☐	☐	☐	☐	☐
Uso da calculadora.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____					
Quando resolvo problemas procuro:					
Ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido.	☐	☐	☐	☐	☐
Registar os dados que parecem importantes.	☐	☐	☐	☐	☐
Começar por resolver as partes do problema que me parecem mais fáceis.	☐	☐	☐	☐	☐
Voltar atrás sempre que me ocorrem dúvidas.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolver tudo seguido e verificar no final.	☐	☐	☐	☐	☐
Analisar se as respostas se adequam ao problema/realidade.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____					
Algumas das minhas dificuldades, na resolução de problemas matemáticos, são devidas à:					
Dificuldades na interpretação do enunciado.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de hábito de trabalho na resolução de problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
Dificuldade na coleta e na organização dos dados.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de bases a matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Dificuldade de raciocínio lógico.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de apoio para estudar.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____					
A resolução de problemas matemáticos é importante para					
O meu dia a dia.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver o raciocínio lógico.	☐	☐	☐	☐	☐
Aceder ao ensino superior.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver o gosto pela matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver a comunicação.	☐	☐	☐	☐	☐
Outro:____					

FIM

ANEXO 4

Respostas ao Questionário

	DT	D	I	C	CT
Gosto de matemática	A8 A16	A4 A13 A14	A1 A10 A3 A12 A5 A15 A9	A6 A7 A11	A2
Tenho uma atitude otimista	A14	A4 A5 A10	A8 A9	A1 A11 A2 A12 A6 A15 A7 A16	A3 A13
Sou preocupado com a exatidão			A3 A6 A11 A14	A1 A9 A4 A10 A5 A12 A7 A15 A8 A16	A2 A13
Procuro sempre terminar as tarefas que inicio			A8 A9	A1 A11 A2 A12 A4 A13 A5 A14 A6 A15 A10 A16	A3 A7
Quando não sei a resposta tento adivinhá-la	A3 A4	A1 A10 A12 A14	A11	A2 A9 A5 A13 A6 A15 A7 A16	A8
Gosto de momentos na aulas em que:					
O professor expõe a matéria		A2 A5	A1 A10 A3 A13 A8 A14	A4 A12 A6 A15 A9 A16 A11	A7
Realizo trabalho individual	A14	A11	A4 A10 A5 A15 A8 A16 A9	A1 A12 A3 A13 A6 A7	A2
Utilizo materiais manipuláveis			A1 A7 A2 A10 A3 A11 A4 A14 A5 A15	A6 A12 A8 A13 A9 A16	
Trabalho em grupo		A8	A5	A2 A10 A4 A15 A6 A16 A9	A1 A12 A3 A13 A7 A14 A11
Percebo a utilidade da matemática			A1 A8 A15	A4 A10 A5 A11 A6 A12 A7 A14 A9 A16	A2 A3 A13

	DT	D	I	C	CT
Gosto das aulas em que:					
O professor propõe uma ficha de tarefas		A1 A9 A4 A10 A8	A2 A14 A3 A15 A11	A5 A12 A6 A13 A7 A16	
O professor apresenta referências históricas		A1 A10	A4 A8 A5 A11 A6 A15 A7	A3 A12 A14	A2 A9 A13 A16
Resolvemos problemas		A8	A1 A10 A3 A11 A4 A14	A2 A12 A5 A13 A6 A15 A7 A16 A9	
Um problema matemático é:					
Diferente de um exercício por causa do grau de dificuldade	A13	A11	A2 A7 A8 A15	A1 A9 A3 A10 A4 A12 A5 A14 A6 A16	
Uma situação que pretendemos resolver mas da qual desconhecemos, inicialmente, o método de resolução		A1 A10	A7 A11	A4 A12 A5 A14 A6 A15 A8 A16 A9	A2 A3 A13
Um enunciado formulado para introduzir matéria nova	A3	A10	A2 A9 A11 A14	A1 A8 A4 A12 A5 A13 A6 A15 A7 A16	
Uma situação que para ser resolvida é necessário envolver diferentes tipos de conhecimentos e experiências	A5 não respondeu		A2 A15	A4 A8 A6 A9 A7 A16	A1 A12 A3 A13 A10 A14 A11
Na resolução de problemas matemáticos sinto:					
Falta de motivação		A2 A11 A6 A12 A7	A1 A10 A3 A13 A5 A16 A9	A4 A8 A15	A14
Satisfação pela atividade intelectual		A4 A12 A14	A1 A8 A5 A10 A7 A16	A2 A11 A3 A13 A6 A15 A9	

	DT	D	I	C	CT
Na resolução de problemas matemáticos sinto: (continuação)					
Dificuldade em abstrair-me de problemas exteriores (sociais, familiares, ...)	A2 A16	A6 A7 A12	A3 A9 A4 A10 A5 A15 A8	A1 A11 A14	A13
Que aplico conhecimentos das minhas experiências pessoais	A8	A1 A4 A7 A9	A2 A12 A5 A13 A10	A3 A14 A6 A15 A11 A16	
Gosto pelo desafio		A1 A8	A3 A9 A4 A10 A5 A14	A2 A13 A6 A15 A7 A16 A12	A11
Ansiedade	A2 A3 A5 A8	A6 A9 A14	A10 A13	A1 A11 A4 A12 A7 A15 A16	
Necessidade de algum silêncio para pensar no problema	A15 não respondeu	A2	A7	A1 A8 A4 A12 A5 A13 A6 A16	A3 A11 A9 A14 A10
Na resolução de problemas uso com frequência a estratégia de:					
Tentativa e erro	A3	A2 A11 A9 A14	A1 A12 A5 A15 A7	A4 A10 A6 A16 A8	A13
Procura de um padrão		A7 A11	A1 A3 A9 A14	A2 A8 A4 A10 A5 A12 A6 A15	A13 A16
Resolução por partes			A8	A1 A7 A2 A9 A3 A10 A4 A11 A5 A12 A6 A15	A13 A14 A16
Eliminação		A2 A7	A1 A8 A11 A12	A4 A10 A5 A15 A6 A16 A9	A3 A13 A14
Dedução		A1	A3 A7 A11 A13	A2 A10 A4 A12 A5 A15 A6 A16 A8	A9 A14

	DT	D	I	C	CT
Na resolução de problemas uso com frequência a estratégia de: (continuação)					
Resolução do fim para o início	A7 A10 A8 A11 A9 A13	A1 A12 A2 A14 A5	A3	A4 A6 A15 A16	
Na resolução de problemas recorro com frequência a (ao):					
Construção de diagramas/figuras		A2 A10 A6 A11 A8	A1 A7 A9	A3 A13 A4 A14 A5 A15 A12 A16	
Construção de tabelas		A1 A2	A8 A10 A11	A3 A9 A4 A12 A5 A13 A6 A14 A7 A16	A15
Aplicação de fórmulas			A8	A1 A10 A2 A11 A3 A12 A4 A13 A5 A14 A6 A15 A7 A16 A9	
Aplicação de Equações	A14		A3 A5 A7 A11 A13	A1 A9 A2 A10 A4 A12 A6 A15 A8 A16	
Uso do computador	A8 A10 A11 A14	A1 A2 A4 A9	A3 A12 A5 A13 A7	A6	A15 A16
Uso da calculadora				A1 A4 A6 A7 A8	A2 A12 A3 A13 A5 A14 A9 A15 A10 A16 A11
Quando resolvo problemas procuro:					
Ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido			A8	A1 A7 A4 A13 A5 A16 A6	A2 A11 A3 A12 A9 A14 A10 A15

	DT	D	I	C	CT
Quando resolvo problemas procuro: (continuação)					
Registar os dados que parecem importantes		A8 A9	A1	A2 A4 A3 A5 A6 A12 A7	A10 A14 A11 A15 A13 A16
Começar por resolver as partes do problema que me parecem mais fáceis	A8	A1	A5 A7	A2 A12 A4 A13 A6 A15 A10	A3 A9 A11 A14 A16
Voltar atrás sempre que me ocorrem dúvidas			A9	A1 A8 A2 A10 A4 A12 A5 A14 A6 A16 A7	A3 A11 A13 A15
Resolver tudo seguido e verificar no final		A1 A8 A2 A10 A4 A14 A5	A3 A7 A11	A6 A15 A9 A16 A13	A12
Analisar se as respostas se adequam ao problema/realidade	A3 A14		A2 A7 A9 A13	A1 A6 A4 A10 A5 A12	A8 A11 A15 A16
Algumas das minhas dificuldades, na resolução de problemas matemáticos, são devidas à:					
Dificuldades na interpretação do enunciado	A3 A14 A9 A16	A2 A8	A5 A7 A12	A1 A10 A4 A13 A6	A11 A15
Falta de hábito de trabalho na resolução de problemas	A3 A9 A14 A16	A2 A6 A7	A1 A10 A13	A4 A11 A5 A12 A8 A15	
Dificuldade na coleta e na organização dos dados	A3 A14 A9 A15 A13	A2 A7 A4 A8 A6	A5 A12 A10 A16 A11	A1	
Falta de bases a matemática	A3 A9 A13	A1 A8 A2 A10	A5 A7	A6 A12 A14 A15	A4 A11 A16
Dificuldade de raciocínio lógico	A3 A9 A8 A16	A1 A10 A2 A15 A6	A5 A7 A13	A4 A12 A11 A14	
Falta de apoio para estudar	A3 A13 A4 A15 A8 A16 A9	A2 A7 A5 A10 A6 A14	A1 A11	A12	

A resolução de problemas matemáticos é importante para:					
O meu dia a dia	A13	A5	A4 A7 A8	A1 A10 A2 A11 A3 A12 A6 A14 A9 A15	A16
Desenvolver o raciocínio lógico				A1 A8 A2 A12 A5 A13 A6 A15 A7	A3 A11 A4 A14 A9 A16 A10
Aceder ao ensino superior			A1 A14 A2 A15 A11	A3 A8 A5 A9 A6 A10 A7 A12	A4 A13 A16
Desenvolver o gosto pela matemática			A1 A12 A3 A13 A8 A14 A9 A15	A2 A7 A4 A10 A5 A11 A6	A16
Desenvolver a comunicação	A13	A6	A1 A11 A5 A15 A8 A9	A2 A7 A3 A10 A4 A12 A14	A16